Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
Unidade Contagem

Curso Pró-técnico

Disciplina : Matemática 2 – Geometria

Professor Leonardo Gonçalves Rimsa

Contagem, Minas Gerais
2021

Apresentação

Prezado Estudante,

O presente texto pretende servir de apoio aos seus estudos de preparação ao Processo Seletivo dos Cursos Técnicos Integrados de Educação Profissional e Tecnológica do CEFET/MG.

Aqui encontram-se os conteúdos do programa de Matemática referentes principalmente à parte de Geometria. Mais especificamente, aos itens 2, 6, 7 e 8 do Conteúdo Programático para a Educação Profissional Técnica de Nível Médio Integrada, conforme edital do ano de 2020.

A teoria é apresentada em capítulos. Cada um deles contém, principalmente, questões de processos seletivos anteriores do CEFET, selecionados das provas de 2005 a 2020.

Bons estudos!
O autor

Sumário

Registro na Câmara Brasileira do Livro : DA – 2021 – 011249

Capítulo 1 : Razões, Proporções, Números Diretamente e Inversamente Proporcionais

1.1. Razão

O conceito de razão está ligado à ideia de "divisão" entre duas grandezas. Damos o nome de GRANDEZA, na matemática, a tudo aquilo que pode ser medido ou contado. A razão entre elas nos dá a noção de quantas vezes uma "cabe" dentro da outra, ou quantas unidades de uma temos para tantas unidades da outra.

Exemplo 1 : Se uma pessoa tem uma renda mensal de R$2.000,00 e gasta R$600,00 mensais com alimentação, a razão de seu gasto alimentar mensal para a sua renda será de :

$$\frac{600}{2000} = \frac{3}{10}$$

Numa razão, o termo de cima é o ANTECEDENTE e o de baixo é o CONSEQUENTE. Uma propriedade interessante é que, ao dividir-se antecedente e consequente pelo mesmo valor, não alteramos a razão. Isso chama-se SIMPLIFICAR. No exemplo acima, dividimos antecedente e consequente por 200.

O valor acima nos mostra, por exemplo, que o salário da pessoa é mais de três vezes o que ela gasta com alimentação, pois 3 "cabe" mais de três vezes em 10 (noção de quantas vezes uma grandeza "cabe" na outra). Numa outra interpretação, podemos dizer que, de cada dez reais do salário desse indivíduo, três reais são gastos com alimentação.

Multiplicar ambos os termos pelo mesmo valor também não altera a razão (pois multiplicar nada mais é do que dividir pelo inverso). Aqui, poderíamos multiplicar ambos os termos por 10 e ver que a razão é equivalente a $\frac{30}{100}$. Isso quer dizer que, de cada cem reais do salário, gasta-se trinta com alimentação. As razões de denominador 100 podem ser expressas pelo antecedente seguido do símbolo (%). Desse modo, poderíamos dizer apenas que 30% do salário da pessoa é gasto com alimentação. Mas o conceito de porcentagem será visto mais à frente.

1.2. Proporção

Chamamos de PROPORÇÃO uma sentença que expressa a igualdade de duas razões. No primeiro exemplo, temos a proporção : $\frac{600}{2000} = \frac{3}{10}$. Os termos 600 e 10 são chamados de EXTREMOS da proporção. Já os termos 2000 e 3 são os MEIOS dela. Uma propriedade interessante é que, em qualquer proporção, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos. Na exemplo citado, vemos, realmente, que :

$$2000 \times 3 = 600 \times 10$$

Esta propriedade é muito útil para calcular termos desconhecidos em proporções.

Exemplo 2 : Calcule o valor de x e o termo desconhecido em cada uma das proporções :

a) $\frac{2x}{5} = \frac{24}{15}$

Resolução : Pela propriedade estudada, temos :

$$2x \times 15 = 5 \times 24 \Rightarrow 30x = 120 \Rightarrow x = \frac{120}{30} = 4$$

Resposta : $x = 4$ e o termo desconhecido da proporção é 8.

b) $\frac{4}{3} = \frac{20}{4x-9}$

Resolução :

$4(4x - 9) = 3 \times 20 \Rightarrow 16x - 36 = 60 \Rightarrow 16x = 96 \Rightarrow x = 6$

Observe que este valor de x não zera o último extremo (condição de existência da equação é $x \neq \frac{9}{4}$).

Resposta : $x = 6$ e o termo desconhecido da proporção é 15.

1.3. Números Diretamente Proporcionais

Conceito : Dizemos que os valores $y_1, y_2, \dots, y_n$ são DIRETAMENTE PROPORCIONAIS aos valores $x_1, x_2, \dots, x_n$ quando temos : $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \cdots = \frac{y_n}{x_n} = a$.

Exemplo 3 : Os números $12, 15\ e\ 18$ são DIRETAMENTE PROPORCIONAIS aos números $4{,}5\ e\ 6$, pois : $\frac{12}{4} = 3$, $\frac{15}{5} = 3$ e $\frac{18}{6} = 3$, ou seja : $\frac{12}{4} = \frac{15}{5} = \frac{18}{6} = 3$. Esta constante a é a CONSTANTE DE PROPORCIONALIDADE DIRETA entre os números. Neste exemplo, $a = 3$.

Exemplo 4 : Os números $12, 8\ e\ 10$ são DIRETAMENTE PROPORCIONAIS aos números $30, 20\ e\ 25$, pois : $\frac{12}{30} = \frac{2}{5}, \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$ e $\frac{10}{25} = \frac{2}{5}$. Nesse caso, temos $a = \frac{2}{5}$.

Exemplo 5 : Os números $6, 14\ e\ 22$ NÃO são diretamente proporcionais aos números $18, 42\ e\ 44$. Apesar de $\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$ e $\frac{14}{42} = \frac{1}{3}$, temos que $\frac{22}{44} = \frac{1}{2}$.

Um problema de grande interesse prático consiste em dividir um certo total dado em partes diretamente proporcionais a um grupo de valores. Nos exemplos a seguir veremos como fazer esta divisão.

Exemplo 6 : Dividir o número 288 em partes diretamente proporcionais a 5, 8 e 11.

Resolução : Chamemos as partes em que o total será dividido de $x, y\ e\ z$. Como o total das partes é 288, temos que $x + y + z = 288$. Além disso, temos que as partes devem ser diretamente proporcionais a 5, 8 e 11, ou seja : $\frac{x}{5} = \frac{y}{8} = \frac{z}{11} = a$. Com isso, formamos o seguinte sistema de equações :

$$\begin{cases} x + y + z = 288 \\ \dfrac{x}{5} = \dfrac{y}{8} = \dfrac{z}{11} = a \end{cases}$$

Da múltipla igualdade da segunda sentença, podemos escrever :

$$\frac{x}{5} = a, \qquad \frac{y}{8} = a, \qquad \frac{z}{11} = a$$

E assim : $x = 5a, y = 8a\ e\ z = 11a$. Substituindo na primeira equação do sistema :

$$5a + 8a + 11a = 288 \Rightarrow 24a = 288 \Rightarrow a = \frac{288}{24} \Rightarrow a = 12$$

Voltando às igualdades para $x, y\ e\ z$, temos :

$$x = 5 \times 12 = 60, y = 8 \times 12 = 96\ e\ z = 11 \times 12 = 132$$

Resposta : As partes são 60, 96 e 132.

A divisão em partes diretamente proporcionais é muito utilizada em problemas em que se tem alguma espécie de “sociedade” entre os envolvidos. Um exemplo é a situação seguinte, em que um grupo de 4 amigos fez um serviço em conjunto e o valor total recebido deverá ser dividido em partes proporcionais ao tempo que cada um se dedicou.

OBS : Ao invés de dizer “divisão em partes diretamente proporcionais”, podemos dizer apenas “divisão em partes proporcionais”.

Exemplo 7 : Júlio, João, Pedro e Paulo se comprometeram a pintar um apartamento dividindo o serviço. O tempo total de serviço foi dividido entre eles da seguinte forma : Júlio trabalhou 5 horas, João trabalhou 6 horas, Pedro pintou por 4 horas e Paulo, 3 horas. Ao final, nada mais justo que a quantia arrecadada com o serviço fosse dividida entre eles em partes proporcionais às horas trabalhadas por cada um. Quanto cada um deles deve receber, se o proprietário do apartamento pagou um total de R$ 1.080,00?

Resolução : Chamemos as partes de $x, y, z\ e\ t$. Temos que $x + y + z + t = 1080$ e $\frac{x}{5} = \frac{y}{6} = \frac{z}{4} = \frac{t}{3} = a$. Temos, então, o sistema :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1080 \\ \dfrac{x}{5} = \dfrac{y}{6} = \dfrac{z}{4} = \dfrac{t}{3} = a \end{cases}$$

Da segunda equação, tiramos : $x = 5a, y = 6a, z = 4a\ e\ t = 3a$. E, substituindo na primeira :

$$5a + 6a + 4a + 3a = 1080 \Rightarrow 18a = 1080 \Rightarrow a = \frac{1080}{18} = 60$$

Logo : $x = 5 \times 60 = 300$, $y = 6 \times 60 = 360$, $z = 4 \times 60 = 240$ e $t = 3 \times 60 = 180$.

Resposta : Júlio recebeu R$300,00; João recebeu R$360,00; Paulo ganhou R$240,00 e Pedro, R$180,00.

1.4. Números Inversamente Proporcionais

Conceito : Dizemos que os valores $y_1, y_2, \dots, y_n$ são INVERSAMENTE PROPORCIONAIS aos valores $x_1, x_2, \dots, x_n$ quando temos : $y_1.x_1 = y_2.x_2 = \cdots = y_n.x_n = p$.

Exemplo 8 : Os números 2,5,3 e 8 são INVERSAMENTE PROPORCIONAIS aos números $60, 24, 40\ e\ 15$, pois : $2 \times 60 = 120, 5 \times 24 = 120, 3 \times 40 = 120\ e\ 8 \times 15 = 120$, ou seja : $2 \times 60 = 5 \times 24 = 3 \times 40 = 8 \times 15 = 120$. Essa constante p é a CONSTANTE DE PROPORCIONALIDADE INVERSA entre os números. Nesse exemplo, temos $p = 120$.

Exemplo 9 : Dividir o número 620 em partes inversamente proporcionais a $2, 3\ e\ 5$.

Resolução : Chamemos as partes de $x, y\ e\ z$. Temos que $x + y + z = 620$. Além disso, como essas partes são inversamente proporcionais a 2,3 e 5, temos : $x.2 = y.3 = z.5 = p$. Logo, formamos o sistema de equações :

$$\begin{cases} x + y + z = 620 \\ 2x = 3y = 5z = p \end{cases}$$

Da segunda equação, podemos escrever : $2x = p \Rightarrow x = \frac{p}{2}$, $3y = p \Rightarrow y = \frac{p}{3}\ e\ 5z = p \Rightarrow z = \frac{p}{5}$. Substituindo na primeira equação, temos :

$$\frac{p}{2} + \frac{p}{3} + \frac{p}{5} = 620$$

$$\frac{15p + 10p + 6p}{30} = \frac{620 \times 30}{30}$$

$$31p = 620 \times 30$$

$$p = \frac{\cancel{620}^{20} \times 30}{\cancel{31}} = 20 \times 30 = 600$$

Assim : $x = \frac{600}{2} = 300$, $y = \frac{600}{3} = 200$ e $z = \frac{600}{5} = 120$.

Resposta : As partes são 300, 200 e 120.

Exemplo 10 : A dona de uma loja resolveu distribuir um lucro extra de R$4.500,00 entre suas três funcionárias : Mariana, Joana e Patrícia. Para tentar ser justa, resolveu que esta distribuição seria em partes inversamente proporcionais ao número de faltas da cada funcionária naquele ano. Se Mariana faltou 3 vezes, Joana faltou 8 vezes e Patrícia, 6 vezes, quanto coube a cada uma?

Resolução : Chamemos as partes em que a quantia foi dividida de $x, y\ e\ z$. Temos, então, o sistema de equações :

$$\begin{cases} x + y + z = 4500 \\ x.3 = y.8 = z.6 = p \end{cases}$$

Da segunda equação, tiramos : $x = \frac{p}{3}, y = \frac{p}{8}\ e\ z = \frac{p}{6}$. Substituindo na primeira :

$$\frac{p}{3} + \frac{p}{8} + \frac{p}{6} = 4500$$

$$\frac{8p + 3p + 4p}{24} = \frac{4500 \times 24}{24}$$

$$15p = 4500 \times 24$$

$$p = \frac{\overset{300}{\cancel{4500}} \times 24}{\cancel{15}} = 300 \times 24 = 7200$$

Logo : $x = \frac{7200}{3} = 2400, y = \frac{7200}{8} = 900\ e\ z = \frac{7200}{6} = 1200$

Resposta : Mariana receberá R$2.400,00; Joana ganhará R$900,00 e Patrícia, R$1.200,00.

Exercícios Propostos

1) Divida o número 1920 em partes diretamente proporcionais a $4, 8\ e\ 3$.

2) Divida o número 1500 em partes inversamente proporcionais a $4\ e\ 6$.

3) (CEFET/MG – 2015) Três pessoas A, B e C, ao criarem uma empresa, investiram, respectivamente, R$ 200.000,00; R$ 300.000,00 e R$ 500.000,00 e firmaram o compromisso de que todo lucro mensal deverá ser dividido entre elas proporcionalmente ao capital investido por cada uma. No mês em que a empresa obteve um lucro de R$ 540.000,00 o valor que B recebeu, em reais, foi de :
   a) 54.000
   b) 162.000
   c) 180.000
   d) 270.000

4) (CEFET/MG – 2011) Uma herança de R$ 60.000,00 foi dividida entre três filhos A, B e C, de maneira inversamente proporcional às respectivas idades 10, 15 e 18 anos. A quantia, em reais, que o filho B recebeu foi :
   a) 12.000
   b) 14.000
   c) 18.000
   d) 27.000

5) (CEFET/MG – 2005) O produto de três números é 648. Sendo esses números proporcionais a 2, 3 e 4, sua soma é igual a :
   a) 30
   b) 27
   c) 18
   d) 9

6) (CEFET/MG – 2020) Júlia e Marcos fizeram uma prova para proficiência em língua inglesa. A razão entre a nota de Júlia e o número 8 e a razão entre a nota de Marcos e o número 27 são diretamente proporcionais a uma mesma constante. Se a soma das notas de ambos é 455, afirma-se corretamente que a nota N_1, de Júlia, está no intervalo :
   a) $40 < N_1 < 60$
   b) $40 < N_1 < 80$
   c) $40 < N_1 < 100$
   d) $40 < N_1 < 120$

Capítulo 2 : Regra de Três

2.1. Grandezas Diretamente Proporcionais

Na matemática, damos o nome de GRANDEZA a tudo aquilo que pode ser medido ou contado.

Analisemos a seguinte situação : Na padaria do bairro de Alberto, vende-se pão ao preço de R$ 6,00 o quilo. Chamando de y a grandeza "preço pago" (em reais) e de x a grandeza "peso de pão" (em kg), temos que a tabela a seguir mostra a dependência entre elas :

$x\ (kg)$	0,250	0,500	1,000	2,000	3,000
$y\ (R\$)$	1,50	3,00	6,00	12,00	18,00

Podemos observar que :

- Dobrando-se o peso comprado (passando-se, por exemplo, de $0{,}250\ kg$ para $0{,}500\ kg$), o preço também dobra (passa de 1,50 para 3,00);
- Triplicando-se o peso (passando-se, por exemplo, de $1{,}000\ kg$ para $3{,}000\ kg$), o preço também triplica (passa de 6,00 para 18,00);
- Dividindo-se o peso por 4 (passando-se, por exemplo, de $2{,}000\ kg$ para $0{,}500\ kg$), temos que o preço também será dividido por 4 (passa de 12,00 para 3,00).

Em geral, ao multiplicar-se o peso por w (com $w > 0$), o preço também fica multiplicado por w.

Podemos observar também que a sequência de números $1{,}50; 3{,}00; 6{,}00; 12{,}00; 18{,}00$ é DIRETAMENTE PROPORCIONAL à sequência de números $0{,}250; 0{,}500; 1{,}000; 2{,}000; 3{,}000$; pois :

$$\frac{1{,}50}{0{,}250} = \frac{3{,}00}{0{,}500} = \frac{6{,}00}{1{,}000} = \frac{12{,}00}{2{,}000} = \frac{18{,}00}{3{,}000} = 6 = a$$

A fórmula que relaciona as duas grandezas é $y = 6x$.

Dizemos que a grandeza "preço pago" é DIRETAMENTE PROPORCIONAL à grandeza "peso de pão" comprado. Desse modo, podemos dizer que duas grandezas são DIRETAMENTE PROPORCIONAIS quando mantém qualquer uma das características abaixo :

- Multiplicando-se uma delas por w (com $w \neq 0$), a outra também fica multiplicada por w;
- A sequência de valores de uma é DIRETAMENTE PROPROCIONAL à sequência de valores correspondentes da outra, ou seja : $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \cdots = \frac{y_n}{x_n} = a$;
- Relacionam-se por fórmula do tipo $y = ax$.

2.2. Grandezas Inversamente Proporcionais

A distância entre as cidades A e B é de 240 km. Uma pessoa faz, de carro, o percurso entre estas duas cidades, “tentando” desenvolver uma velocidade de módulo constante durante todo o trajeto. A tabela abaixo mostra a relação entre as grandezas “velocidade” (em km/h) e “tempo de viagem” (sabemos que $t = \frac{d}{v}$) :

Velocidade (km/h)	40	50	60	80	100
Tempo (h)	6	4,8	4	3	2,4

É possível observar que :

- Dobrando-se a velocidade do carro (passando-se de 40 km/h para 80 km/h, o tempo de viagem se reduz à metade (passa de 6h para 3h);
- Dividindo-se a velocidade por 2,5 (passando-se de 100 km/h para 40 km/h), o tempo de viagem fica multiplicado por 2,5 (passa de 2,4h para 6h);

Em geral, ao multiplicar-se a velocidade por w (com $w > 0$), o tempo fica multiplicado por $\frac{1}{w}$.

Podemos também observar que a sequência de números $6; 4{,}8; 4; 3; 2{,}4$ é INVERSAMENTE PROPORCIONAL à sequência $40, 50, 60, 80, 100$, pois :

$$6 \times 40 = 4{,}8 \times 50 = 4 \times 60 = 3 \times 80 = 2{,}4 \times 100 = 240 = p$$

A fórmula que relaciona as duas grandezas é $t = \frac{240}{v}$.

Dizemos que a grandeza “tempo de viagem” é INVERSAMENTE PROPORCIONAL à grandeza “velocidade”. Desse modo, podemos dizer que duas grandezas são INVERSAMENTE PROPORCIONAIS quando mantém qualquer uma das características abaixo :

- Multiplicando-se uma delas por w (com $w \neq 0$), a outra fica multiplicada por $\frac{1}{w}$;
- A sequência de valores de uma é INVERSAMENTE PROPROCIONAL à sequência de valores correspondentes da outra, ou seja : $y_1 . x_1 = y_2 . x_2 = \cdots = y_n . x_n = p$;
- Relacionam-se por fórmula do tipo $y = \frac{p}{x}$.

2.3. Regra de Três Simples

Os problemas de REGRA DE TRÊS SIMPLES, como o próprio nome diz, fornecem três informações para que se calcule um quarto valor desconhecido. Os problemas envolvem sempre duas grandezas, que são diretamente ou inversamente proporcionais.

Exemplo 1 : Uma família de 4 pessoas consome, em média, 7 quilos de arroz por mês. Então, qual será o consumo médio mensal de arroz de uma família de 11 pessoas?

Resolução : Neste problema, temos duas grandezas envolvidas : NÚMERO DE PESSOAS NA FAMÍLIA e CONSUMO MENSAL DE ARROZ (kg). Por uma análise empírica, vemos que estas grandezas são DIRETAMENTE PROPORCIONAIS. Realmente, aumentando-se o número de pessoas na família, é esperado que o consumo de arroz aumente NO MESMO FATOR! Podemos organizar as informações do problema no quadro a seguir :

Nº de Pessoas	Cons. de arroz (kg)
4	7
11	x

Observe que chamamos a quantidade (em kg) de arroz consumida pela família de 11 pessoas de x. As setas no mesmo sentido representam o fato de que as grandezas são diretamente proporcionais (quando são inversamente proporcionais, indicamos por setas em sentidos opostos). Se as grandezas são DP, podemos montar uma proporção com os dados do quadro, **na ordem em que aparecem**. Isso vem do fato de que os valores de uma grandeza são números DP aos valores da outra. Escrevendo a igualdade dos números DP e utilizando algumas propriedades, podemos mostrar que os valores das grandezas satisfazem a proporção :

$$\frac{4}{11} = \frac{7}{x}$$

Uma propriedade das proporções diz que o produto dos meios é igual ao produto dos extremos. Assim :

$$\frac{4}{11} = \frac{7}{x} \Rightarrow 4x = 11 \times 7 \Rightarrow 4x = 77 \Rightarrow x = \frac{77}{4} = 19{,}25\ kg$$

Resposta : Uma família de 11 pessoas consumirá 19,25 kg de arroz por mês.

Exemplo 2 : Uma quantidade de 8 operários conseguem realizar uma determinada obra em 12 dias. Quantos dias serão necessários para que 10 operários consigam realizar uma obra idêntica à anterior?

Resolução : Aqui, as grandezas envolvidas são : NÚMERO DE OPERÁRIOS e QUANTIDADE DE DIAS. Essas grandezas são INVERSAMENTE PROPORCIONAIS. Realmente, dobrando-se o número de operários, é esperado que a obra seja realizada na metade dos dias. Em geral, aumentando-se os operários, o tempo de obra diminuirá no mesmo fator! Organizamos os dados num quadro e colocamos setas em sentidos contrários, para indicar que as grandezas são IP.

Nº de operários	Dias de obra
8	12
10	x

Se as grandezas são IP, podemos montar uma proporção com os dados do quadro, **mas devemos inverter a ordem de uma das razões da proporção**. Isso vem do fato de que os valores de uma grandeza são números IP aos valores da outra. Escrevendo a igualdade dos números IP e utilizando algumas propriedades, podemos mostrar que a proporção vai inverter uma das razões. Então, a proporção será :

$$\frac{8}{10} = \frac{x}{12} \Rightarrow 10x = 12 \times 8 \Rightarrow 10x = 96 \Rightarrow x = 9{,}6\ dias$$

Resposta : 9,6 dias.

Exemplo 3 : Por 2,3 kg de carne, Joana pagou R$ 82,80. Se Carla pretende comprar 5,2 kg da mesma carne e no mesmo açougue, quanto ela pagará?

Resolução : Neste problema, as grandezas QUANTIDADE DE CARNE (EM KG) E PREÇO PAGO (EM R$), são diretamente proporcionais (verifique). As setas com mesmo sentido indicam isso :

Quantidade (kg)	Preço (R$)
2,3	82,80
5,2	x

Como as grandezas são DP, podemos montar uma proporção com os dados quadro **na ordem em que aparecem** :

$$\frac{2{,}3}{5{,}2} = \frac{82{,}80}{x} \Rightarrow 2{,}3x = 430{,}56 \Rightarrow x = \frac{430{,}56}{2{,}3} = 187{,}20$$

Resposta : Carla pagará R$ 187,20.

Exemplo 4 : Dirigindo a uma velocidade média de 80 km/h, uma pessoa consegue ir da cidade A até a cidade B em 5 horas e 30 minutos (ou 5,5 horas). Em quanto tempo esta viagem será feita se a velocidade média executada for de 110 km/h?

Resolução : Neste caso, as grandezas envolvidas no problema são INVERSAMENTE PROPORCIONAIS :

Velocidade (km/h)	Tempo (h)
80	5,5
110	x

Então podemos montar uma proporção com os dados da tabela, invertendo uma das razões :

$$\frac{110}{80} = \frac{5{,}5}{x} \Rightarrow 110x = 440 \Rightarrow x = \frac{440}{110} = 4\ horas$$

Resposta : 4 horas.

2.4. Regra de Três Composta

Dizemos que um problema envolve REGRA DE TRÊS COMPOSTA quando se relacionam, através dele, mais de duas grandezas. Nesse caso, devemos analisar cada grandeza do problema junto com aquela que contém a incógnita, decidindo se são DP ou IP. Vejamos os exemplos.

Exemplo 5 : Uma quantidade de 20 operários, trabalhando 6 horas diárias, constrói um muro de 25 metros de comprimento em 7 dias. Quanto tempo levarão 16 operários para construir um muro de 32 metros, trabalhando 8 horas por dia?

RIMSA, Leonardo Gonçalves. MATEMÁTICA FINANCEIRA CONCISA. IUS EDITORA, 2010.

Resolução : Neste problema, temos quatro grandezas envolvidas : QUANTIDADE DE OPERÁRIOS, NÚMERO DE HORAS DIÁRIAS, COMPRIMENTO DO MURO (EM METROS) e NÚMERO DE DIAS.

A grandeza "NÚMERO DE DIAS" é a que possui a incógnita da questão. Portanto, vamos analisar cada uma das outras três com ela.

Mantendo-se constante as outras grandezas, temos que a QUANTIDADE DE OPERÁRIOS é inversamente proporcional ao NÚMERO DE DIAS necessários para a conclusão da obra. De fato, aumentando-se o número de pessoas trabalhando, o número de dias necessários diminui no mesmo fator.

Mantendo-se constante as outras grandezas, temos que o NÚMERO DE HORAS DIÁRIAS é inversamente proporcional ao NÚMERO DE DIAS necessários para a conclusão da obra. De fato, aumentando-se o número de horas trabalhadas diariamente, o número de dias necessários diminui no mesmo fator.

Já as grandezas COMPRIMENTO DO MURO e NÚMERO DE DIAS são diretamente proporcionais. Realmente, multiplicando-se o comprimento do muro por k (e mantendo-se o número de operários e o número de horas que eles trabalham por dia invariáveis), temos que o número de dias necessários também será multiplicado por k.

A tabela a seguir organiza os dados do problema.

Quantidade de operários	Número de horas diárias	Comprimento do muro (m)	Número de dias
20	6	25	7
16	8	32	x

Para colocar as "setas", procedemos da seguinte forma : Escolhemos um sentido qualquer (para cima ou para baixo) para a seta da grandeza que possui a incógnita x. As grandezas DP a ela devem ter seta no mesmo sentido. As IP, no sentido oposto.

Para montar a equação, colocamos, antes do "igual", a razão correspondente à grandeza com o x. Depois do "igual" as outras razões multiplicadas, lembrando de inverter aquelas que são IP com a grandeza que contém o x :

$$\frac{7}{x}=\frac{16}{20}\times\frac{8}{6}\times\frac{25}{32}$$

Realizando as simplificações possíveis, temos :

$$\frac{7}{x}=\frac{\overset{1}{\cancel{16}}}{\underset{4}{\cancel{20}}}\times\frac{8}{6}\times\frac{\overset{5}{\cancel{25}}}{\underset{2}{\cancel{32}}}$$

E, resolvendo a equação :

$$\frac{7}{x}=\frac{5}{6}\Rightarrow 5x=42\Rightarrow x=8{,}4\ dias$$

Resposta : 8,4 dias.

Exemplo 6 : (Unifor – CE) Se 6 impressoras iguais produzem 1000 panfletos em 40 minutos, em quanto tempo 3 dessas impressoras produziriam 2000 desses panfletos?

Resolução : As grandezas envolvidas e os dados do problema estão organizados na tabela a seguir. Convença-se dos sentidos das setas :

Número de impressoras	Número de panfletos	Tempo (min)
6 $\uparrow$	1000 $\downarrow$	40 $\downarrow$
3	2000	x

Então : $\frac{40}{x}=\frac{3}{6}\times\frac{1000}{2000}\Rightarrow\frac{40}{x}=\frac{1}{4}\Rightarrow x=160\ minutos$

Resposta : 160 minutos.

Exercícios Propostos

1) (UFMG) Uma empresa tem 750 empregados e comprou marmitas individuais congeladas suficientes para o almoço deles durante 25 dias. Se essa empresa tivesse mais 500 empregados, a quantidade de marmitas adquiridas seria suficiente para quantos dias?

2) (CEFET/MG – 2017) Para executar uma reforma em uma loja, foram contratados n operários. O mestre de obras argumentou : "para entregar a obra 2 dias antes do prazo previsto, seria necessário contratar mais 3 operários; se, entretanto, 2 operários fossem dispensados a obra atrasaria em 2 dias." Considerando que os operários trabalhem da mesma forma, o número n de operários contratados foi :
   a) 6
   b) 12
   c) 18
   d) 24

3) (CEFET/MG – 2016) Em uma empresa, 10 funcionários produzem 150 peças em 30 dias úteis. O número de funcionários de que a empresa vai precisar para produzir 200 peças, em 20 dias úteis, é igual a :
   a) 18
   b) 20
   c) 22
   d) 24

4) (CEFET/MG – 2014) Seu Wagner, personagem do livro *A Mocinha do Mercado Central*, contratou uma equipe de artesão para fazer um lote de bijuterias num prazo de 10 horas. Entretanto, 4 integrantes dessa equipe não puderam comparecer e o serviço demorou 5 horas a mais. Nessa situação, o número inicial de artesãos contratados era igual a :
   a) 8
   b) 12
   c) 16
   d) 20

5) (CEFET/MG – 2012) Uma fábrica de calçados, localizada em Nova Serrana, emprega 16 operários, os quais produzem 120 pares de calçados em 8 horas de trabalho diárias. A fim de ampliar esta produção para 300 pares por dia, a empresa mudou a jornada de trabalho para 10 horas diárias. Nesse novo contexto, o número de operários será igual a :
   a) 16
   b) 24
   c) 32
   d) 50

6) (CEFET/MG – 2008) Duas impressoras produzem 330 cartazes em 3 horas de trabalho. Sabendo-se que uma delas é 20% mais rápida que a outra, o número de cartazes que a mais lenta imprimiria em 4 horas e 48 minutos seria de :
   a) 212
   b) 220
   c) 232
   d) 240

7) (CEFET/MG – 2006) Para fazer 22 pães, um padeiro utiliza 1 quilo de farinha de trigo, 7 ovos e 200 gramas de manteiga. O maior número de pães que ele conseguirá fazer com 13 quilos de farinha, 56 ovos e 4 quilos de manteiga é :
   a) 160
   b) 176
   c) 216
   d) 228

8) (CEFET/MG – 2005) Um determinado trabalho é feito por João em 9 dias, por José em 12 e por Pedro em 18. O número de dias que os três juntos gastariam para executar esse trabalho é :
   a) 4
   b) 6
   c) 7
   d) 8

Capítulo 3 : Matemática Comercial e Financeira

3.1. Porcentagem

Suponhamos a seguinte situação : Pedro gasta R$ 400,00 mensais com seu plano de saúde, sendo que seu salário atual é de R$ 2.000,00. Ao calcular a razão entre seu gasto com plano de saúde e o seu salário, obtemos :

$$\frac{400}{2000} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

Como já dissemos, isso pode ser interpretado de algumas formas. Podemos dizer, por exemplo, que, a cada 5 reais de seu salário, 1 real é gasto com plano de saúde. Em situações do dia-a-dia, porém, é interessante saber a quantidade em cada 100. A pergunta seria : a cada 100 reais de salário, quanto é gasto com o tal plano? Se Pedro "separasse" o seu salário em grupos de 100 reais, quanto ele teria que retirar de cada grupo desses para conseguir o valor do plano de saúde no fim do mês? Para responder à indagação, basta multiplicar antecedente e consequente da razão obtida por 20 :

$$\frac{1}{5} = \frac{20}{100} = 20\%$$

Na matemática, uma razão de denominador 100 pode ser expressa por seu antecedente seguido do símbolo %. Assim, podemos dizer, simplesmente, que 20% (vinte por cento) do salário de Pedro é utilizado mensalmente para quitar o plano de saúde. O valor 20% é chamado de TAXA PERCENTUAL. O valor total do salário (R$ 2.000,00) é chamado de PRINCIPAL e o valor R$ 400,00 é chamado de PORCENTAGEM.

Na prática, não precisamos fazer todo o processo descrito acima. Para "transformar" uma razão qualquer em TAXA PERCENTUAL, basta dividir antecedente pelo consequente e multiplicar o resultado obtido por 100. Vejamos alguns exemplos :

Exemplo 1 : Numa loja, uma calça jeans custava R$ 280,00. O departamento financeiro decidiu acrescentar R$ 14,00 ao preço. Qual foi o aumento percentual sofrido?

Resolução : A razão do aumento para o preço original foi : $\frac{14}{280} = 0{,}05$. Multiplicando por 100 : $(0{,}05 \times 100)\% = 5\%$.

Resposta : A calça sofreu um aumento de 5%.

Exemplo 2 : Numa sala de aula temos 25 estudantes do sexo feminino e 15 do sexo masculino. Qual a porcentagem de mulheres nesta sala?

Resolução : Para achar a porcentagem de mulheres, devemos analisar a razão entre o número delas e o total de pessoas da sala : $\frac{mulheres}{total} = \frac{25}{40} = 0{,}625$. Multiplicando por 100 : $(0{,}625 \times 100)\% = 62{,}5\%$.

Resposta : A sala possui 62,5% de mulheres.

Observação : Na matemática comercial e na financeira, o termo 62,5% é chamado de TAXA PERCENTUAL. Já o termo 0,625 é chamado de TAXA UNITÁRIA. Os livros costumam utilizar a letra r para taxa percentual e i para taxa unitária. No problema anterior, por exemplo, temos $r = 62{,}5\%$ e $i = 0{,}625$.

3.2. Problemas sobre Porcentagem

Muitos autores gostam de deduzir várias fórmulas para se aplicar em problemas de porcentagem. Enfatizaremos apenas duas. No mais, vamos optar por utilizar aqui um assunto já estudado : a regra de três. Interpretando corretamente cada problema, veremos que é possível resolvê-los utilizando REGRA DE TRÊS SIMPLES. E mais : veremos que as grandezas envolvidas são DIRETAMENTE PROPORCIONAIS. É este o método que vamos priorizar aqui.

Exemplo 3 : Um produto custa R$ 320,00 e sofre um aumento de 15%. Qual o valor, em reais, deste aumento? Qual é o novo preço do produto?

Resolução : O preço inicial do produto (R$ 320,00) corresponde a 100% de seu valor. Já os 15% correspondem ao valor x. As grandezas são DP. Assim, temos :

$$\boxed{\begin{array}{ccc} 320 & \longrightarrow & 100\% \\ x & \longrightarrow & 15\% \end{array}}$$

Então : $\frac{320}{x} = \frac{100\%}{15\%} \Rightarrow 100x = 320 \times 15 \Rightarrow 100x = 4800 \Rightarrow x = 48$
Novo preço : $320 + 48 = 368$

Resposta : O aumento foi de R$ 48,00. O novo preço passou a ser R$ 368,00.

Nesse ponto, vale a pena sugerir uma fórmula útil. Ao calcular o valor do aumento, fizemos o seguinte cálculo : $x = \frac{320 \times 15}{100} = 320 \times \frac{15}{100} = 320 \times 0{,}15 = 320i$. Veja que, de acordo com a notação mostrada acima, i é a TAXA UNITÁRIA DE AUMENTO, ou seja, neste caso, $i = 0{,}15$. Desse modo, podemos tirar a seguinte conclusão : para calcular uma porcentagem de algum valor, basta multiplicar este valor pela taxa unitária!

Se temos um valor inicial P_o e queremos dar um aumento com taxa i, temos que o valor do aumento é : $A = P_o i$. Já o preço final P, após o aumento, será dado por : $P = P_o + A = P_o + P_o i = P_o(1 + i)$. A fórmula $\boldsymbol{P = P_o(1 + i)}$ é chamada de **fórmula básica do aumento**.

No exemplo 3 poderíamos, ao invés de usar a regra de três, utilizar o que foi descrito acima. Poderíamos fazer assim :

$$A = P_o i = 320 \times 0{,}15 = 48$$
$$P = P_o(1 + i) = 320 \times (1 + 0{,}15) = 320 \times 1{,}15 = 368$$

Olha só que legal! Se você quer saber quanto é 15% de algo, multiplique por 0,15. Agora, se você quer saber qual é o preço final, já acrescidos os 15%, basta multiplicar por 1,15 (1 mais a taxa)! Vamos supor, por exemplo, que um produto vai sofrer um acréscimo de 22%. Para saber o valor do acréscimo, multiplique por 0,22. Para saber o valor final (já com o acréscimo), multiplique por 1,22. Genial!

No próximo problema, temos uma situação de DESCONTO, e não de aumento. Podemos resolver por regra de três ou chegar a uma fórmula bem parecida com a dos aumentos.

Exemplo 4 : Jane foi pagar uma prestação de R$ 540,00. Como pagou antes do vencimento, foi concedido a ela um desconto de 8%. Qual foi o valor do desconto? Qual foi o valor efetivamente pago?

Resolução 1 (Regra de Três) : O valor inicial da prestação (R$ 540,00) corresponde a 100% de seu valor. Já os 8% correspondem ao valor x. As grandezas são DP. Assim, temos :

$$\boxed{\begin{array}{lcl} 540 & \longrightarrow & 100\% \\ x & \longrightarrow & 8\% \end{array}}$$

Então : $\frac{540}{x} = \frac{100\%}{8\%} \Rightarrow 100x = 540 \times 8 \Rightarrow x = \frac{540\times 8}{100} = 540 \times \frac{8}{100} = 540 \times 0{,}08 = 43{,}20$

Valor pago : $540{,}00 - 43{,}20 = 496{,}80$

Aqui também podemos enfatizar uma fórmula interessante. Se temos um produto com valor inicial P_o e vamos dar um desconto com taxa unitária i, temos que :

$$D = P_o i$$
$$P = P_o - D = P_o - P_o i = P_o(1 - i)$$

A fórmula $\boldsymbol{P = P_o(1 - i)}$ é a **fórmula básica do desconto**. Ela é bem parecida com a anterior. Veja que, se i é taxa de aumento, entra com sinal positivo. Se for taxa de desconto, entra com sinal negativo. Podemos, então, resolver o problema de outro modo.

Resolução 2 :

$$D = P_o i = 540 \times 0{,}08 = 43{,}20$$
$$P = P_o(1 - i) = 540 \times (1 - 0{,}08) = 540 \times 0{,}92 = 496{,}80$$

Observe que, se Jane teve 8% de desconto, só pagou 92% do valor inicial da prestação. Logo, para saber o valor do desconto, multiplique por 0,08. Para saber o valor efetivamente pago, já com o desconto, multiplique por 0,92.

Resposta : Jane teve um desconto de R$ 43,20 e pagou efetivamente R$ 496,80.

Exemplo 5 : Certo produto, após um aumento de 22%, passou a custar R$ 168,36. Qual era o preço inicial deste produto, antes do aumento?

Resolução 1 (Regra de três) : Um erro que muitos estudantes cometem num problema deste tipo é calcular 22% de 168,36 e subtrair. Este procedimento está ERRADO! Isso ocorre porque os 22% foram calculados sobre o valor inicial do produto, e não sobre o valor final de 168,36. Ao calcular 22% de 168,36; vamos obter um valor maior do que foi o aumento efetivo e, consequentemente, obteremos um valor inicial menor do que o verdadeiro.

Aqui, o correto é chamar o valor inicial do produto de x, o que corresponde a 100%. O aumento dado foi de $(168{,}36 - x)$, que corresponde a 22% de x (veja que o aumento foi dado sobre o valor inicial x). Assim :

$$\boxed{\begin{array}{ccc} x & \longrightarrow & 100\% \\ 168{,}36 - x & \longrightarrow & 22\% \end{array}}$$

Então :

$$\frac{x}{168{,}36 - x} = \frac{100}{22}$$
$$22x = 100(168{,}36 - x)$$
$$22x = 16836 - 100x$$
$$22x + 100x = 16836$$
$$122x = 16836 \Rightarrow x = \frac{16836}{122} = 138$$

Resolução 2 (Fórmula Básica do Aumento)

$$P = P_o(1 + i)$$
$$168{,}36 = P_o(1 + 0{,}22)$$
$$168{,}36 = 1{,}22P_o \Rightarrow P_o = \frac{168{,}36}{1{,}22} = 138$$

Resposta : O valor antes do aumento era de R$ 138,00.

Exemplo 6 : No ano passado, Marcelo gastava 16% de seu salário com aluguel. Devido à crise econômica, ele negociou a renovação do contrato para este ano e conseguiu, junto ao proprietário, uma redução de 10% no valor. Concomitantemente, ele teve uma progressão salarial, aumentando sua renda em 15%. Neste ano, qual porcentagem de seu salário Marcelo vai gastar com o aluguel?

Resolução : Chamemos o salário inicial de Marcelo (salário do ano passado) de x. O valor gasto com aluguel (no ano passado) era $0{,}16x$.

Nesse ano, o salário aumentou 15%. Pela fórmula básica do aumento, temos que o novo salário será : $x(1 + 0{,}15) = 1{,}15x$. Já o aluguel sofreu uma redução de 10%. Pela fórmula básica do desconto, o novo aluguel é : $0{,}16x(1 - 0{,}10) = 0{,}144x$.

Fazendo uma regra de três, temos que : o novo salário corresponde a 100%. Logo, o novo aluguel corresponderá à porcentagem p :

$$\begin{array}{ccc} 1{,}15x & \longrightarrow & 100\% \\ 0{,}144x & \longrightarrow & p \end{array}$$

Logo : $\frac{1{,}15x}{0{,}144x} = \frac{100\%}{p} \Rightarrow 1{,}15p = 14{,}4 \Rightarrow p = 12{,}52\%$

Resposta : Neste ano, Marcelo está gastando 12,52% de seu salário com aluguel.

OBS : Se tiver dificuldade para trabalhar com x, pode dar um valor numérico para o salário (tipo 1000 reais). Fica mais fácil entender.

Exemplo 7 (Covest – PE) : As bebidas L, V e R possuem teores alcoólicos de 24%, 44% e 36%, respectivamente. Qual o teor alcoólico de um coquetel consistindo de 50mL de L, 25mL de V, 25mL de R e 100mL de água?

a) 15%
b) 20%
c) 16%
d) 17%
e) 19%

Resolução : Primeiramente, vamos calcular a quantidade de álcool que virá de cada uma das bebidas :

$$L : 50 \times 0{,}24 = 12mL$$
$$V : 25 \times 0{,}44 = 11mL$$
$$R : 25 \times 0{,}36 = 9mL$$

Logo, temos uma quantidade total de álcool de $12 + 11 + 9 = 32mL$, num volume total de solução de $50 + 25 + 25 + 100 = 200mL$:

$$\begin{array}{ccc} 200mL & \longrightarrow & 100\% \\ 32mL & \longrightarrow & x \end{array}$$

Então : $\frac{200}{32} = \frac{100}{x} \Rightarrow 200x = 3200 \Rightarrow x = 16\%$

Resposta : C.

Exemplo 8 : Uma mercadoria foi remarcada em uma loja com 25% de aumento. Insatisfeito com as vendas, o comerciante resolveu retornar ao preço original. Qual o desconto deve ser dado ao novo preço?

Resolução : Chamemos o preço inicial de x. Se foi dado um aumento de 25%, o preço passa a ser : $1{,}25x$.

Agora vamos usar a fórmula básica do desconto, com $P_o = 1{,}25x$ e $P = x$:

$$x = 1{,}25x(1 - i) \Rightarrow \frac{x}{1{,}25x} = 1 - i \Rightarrow 1 - i = 0{,}80 \Rightarrow -i = 0{,}80 - 1 \Rightarrow i = 0{,}20$$

Resposta : Deve ser dado 20% de desconto.

OBS : Veja que, para “anular” um aumento de 25%, não deve ser dado um desconto de 25%, e sim de 20%. Isso ocorre porque o aumento foi dado sobre um valor. Já o desconto será dado sobre outro! Neste problema, se tiver dificuldade de trabalhar com o x, dê um valor numérico para o preço inicial (tipo 100 reais).

Exercícios Propostos

1) (CEFET/MG – 2018) Sabe-se que, para preparar uma determinada suplementação alimentar, a quantidade de suplemento a ser diluída deve ser de 3% do volume de leite. Se for utilizado meio litro de leite e se a medida usada para o suplemento for uma colher que tem $3cm^3$, então, o número de colheres do suplemento que será necessário, nessa preparação, é igual a :
   a) 5
   b) 6
   c) 7
   d) 8

2) (CEFET/MG – 2017) Por regulamentação federal, uma pessoa pode comprometer até 30% de seu salário bruto mensal com empréstimos consignados em folha (empréstimos cujo pagamento das prestações é descontado no salário). Uma pessoa com salário bruto mensal de R$ 2.800,00 já tem comprometido 25% desse valor em prestação mensal e deseja utilizar todos os 5% restantes em um novo empréstimo. O valor dessa nova prestação, em reais, é :
   a) 70,00
   b) 140,00
   c) 210,00
   d) 280,00

3) (CEFET/MG – 2014) Em um campeonato de atletismo, entre duas cidades vizinhas A e B, 60% dos atletas são homens, 25% das mulheres competem pela cidade B, e a cidade A tem 24 atletas do sexo feminino. O número total de competidores masculinos é :
   a) 36
   b) 48
   c) 60
   d) 80

4) (CEFET/MG – 2013) Suponha que a população de baixa renda no Brasil gastou 15,6% de seus rendimentos mensais com energia elétrica até o final de agosto de 2012, e, no mês seguinte, o governo concedeu uma redução de 20% no preço dessa energia. Se não houve variações na renda familiar dessa classe nesse período, então a nova porcentagem de gastos com a energia será de :
   a) 13,25%
   b) 12,48%
   c) 4,40%
   d) 3,12%

5) (CEFET/MG – 2010) Na prevenção da gripe suína está sendo muito usada uma solução com 70% de álcool e 30% de água, cuja concentração é de 70%. Um laboratório desenvolve duas soluções da seguinte maneira :
   - S_1 com 60% do princípio ativo P;
   - S_2 com 80% de S_1 e 20% de P.

   Dessa forma, S_2 tem uma concentração percentual de, aproximadamente :
   a) 68
   b) 78
   c) 88
   d) 98

6) (CEFET/MG – 2010 – Adapt) Duas marcas de pasta de dente, *Alegria* e *Felicidade*, sofreram algumas mudanças em seus pesos e preços, conforme a seguinte tabela :

	PASTA ALEGRIA		PASTA FELICIDADE	
	antes	depois	antes	depois
Peso (em gramas)	x	x	x	x – 20
Preço (em reais)	4,00	4,50	4,00	4,00

   Um consumidor que comprava a pasta *Felicidade*, ao ver a alteração no peso desse produto, constatou que seu preço, por grama, havia se tornado 25% maior. Analisando esses dados, é INCORRETO afirmar que :
   a) a pasta *Alegria* teve um aumento de 12,5%.
   b) a compra da pasta *Alegria* tornou-se mais econômica.
   c) a pasta *Felicidade*, após a mudança, passou a conter 100g.
   d) o aumento do preço, por grama, da pasta *Felicidade* foi o dobro da *Alegria*.

7) (CEFET/MG – 2009) Um produto com embalagem de 500mL está em promoção, no supermercado A, por R$ 9,60. Esse mesmo produto é vendido em embalagem de 250mL, no supermercado B, por R$ 7,68. Se os 500mL forem adquiridos em B, paga-se a mais :
   a) 50%
   b) 55%
   c) 60%
   d) 65%

8) (CEFET/MG – 2008) Num laboratório, foram realizadas misturas com os líquidos I (L_1) e II (L_2), obtendo-se as soluções S_1, S_2, S_3 e S_4 da seguinte forma :
   - em S_1, foi usado somente L_1;
   - em S_2, 90% de S_1 e 10% de L_2;
   - em S_3, 90% de S_2 e 10% de L_2;
   - em S_4, 90% de S_3 e 10% de L_2.

   Desse modo, S_4 apresentará uma concentração de L_2 igual a :

a) 25,6%
b) 27,1%
c) 32,4%
d) 35,8%

9) (CEFET/MG – 2008) Num reservatório com 280 litros de água, foram acrescentados 3/20 de sua capacidade. Se ainda faltam 57% para encher totalmente esse reservatório, então a quinta parte do restante, em litros, é igual a :
a) 114
b) 116
c) 118
d) 120

10) (CEFET/MG – 2008) Duas impressoras produzem 330 cartazes em 3 horas de trabalho. Sabendo-se que uma delas é 20% mais rápida que a outra, o número de cartazes que a mais lenta imprimiria em 4 horas e 48 minutos seria de :
a) 212
b) 220
c) 232
d) 240

11) (CEFET/MG – 2007) Para “desdobrar” um litro de aguardente de primeira qualidade, com 15^o de teor alcoólico, em quatro litros, adicionaram-se a esse três litros de uma outra de qualidade inferior, com teor de 35^o. O resultado obtido foi uma aguardente de qualidade intermediária. Referindo-se à de primeira qualidade, a porcentagem de aumento do teor alcoólico foi igual a :
a) 30%
b) 50%
c) 80%
d) 100%

12) (CEFET/MG – 2007) Um recipiente contém 2.375 litros de uma mistura de combustível, sendo 4% de álcool puro. O número de litros de álcool que se deve acrescentar a esse recipiente para a nova mistura ter 5% de álcool é :
a) 20
b) 23
c) 24
d) 25

13) (CEFET/MG – 2006) Os médicos recomendam para um adulto 800mg de cálcio por dia e informam que 1 litro de leite contém 1.880mg de cálcio. Se um adulto tomar 200mL de leite, o percentual da dose diária recomendada de cálcio que ele absorve é :
a) 17%
b) 27%
c) 37%
d) 47%

14) (CEFET/MG – 2006) Sobre o preço final do produto de uma fábrica, gastam-se 1/5 com impostos, 1/4 com salários, 30% com matéria-prima e o restante é lucro. O percentual representado pelo lucro é :
   a) 15%
   b) 20%
   c) 25%
   d) 30%

15) (CEFET/MG – 2005) Ricardo e Aline têm, respectivamente, 19 e 17 anos. Aline terá 92% da idade de Ricardo daqui a ____ anos. Preenche-se corretamente a lacuna com :
   a) 4
   b) 5
   c) 6
   d) 8

3.3. Juros Simples

Na Matemática Financeira, chamamos de JURO à remuneração paga pela utilização do dinheiro. É uma espécie de "aluguel" pelo uso.

Alguns termos são importantes. O valor inicial, tomado num empréstimo ou aplicado numa operação financeira, é chamado de CAPITAL (C). Os juros serão calculados utilizando-se uma TAXA (unitária) i, durante um período de TEMPO t. Veremos que, para realizar os cálculos, é necessário que i e t estejam na mesma unidade. Já o MONTANTE (M) é o valor final, aquele que deve ser pago (no caso de empréstimo) ou recebido (no caso de aplicação). O montante equivale à soma do capital com os juros.

Existem dois sistemas para o cálculo dos juros. Nos juros simples, o valor do juro, ao fim de cada período, é fixo, e sempre calculado sobre o valor inicial ou capital. Vamos entender melhor através do exemplo.

Exemplo 9 : Marcos tomou um empréstimo de R$ 1.500,00 em uma instituição financeira que cobra taxa de 2% ao mês de juros simples. O contrato dizia que o pagamento seria após 4 meses. Qual o valor dos juros produzidos? Qual o montante a ser pago ao fim do contrato?

Resolução : Neste problema, temos $C = 1500, i = \frac{2}{100} = 0{,}02\ e\ t = 4$. Veja que i é a taxa unitária (taxa percentual dividida por 100) e que tempo e taxa estão na mesma unidade (ambos em meses).

Como a sistemática adotada no empréstimo é o regime de juros simples temos que, ao final de cada período (ao final de cada mês), o juro produzido será sempre o mesmo, ou seja, 2% do capital de 1500 : $1500 \times 0{,}02$. Isso quer dizer que, ao fim de cada mês, a "dívida" cresce deste valor fixo, que foi calculado sobre o capital ou valor inicial do processo. Como o empréstimo durou 4 meses, então os juros a serem pagos ao final serão de :

$$j = 1500 \times 0{,}02 \times 4 = 120\ reais$$

Logo, o montante a ser devolvido à instituição financeira ao fim do contrato será a soma do valor inicial tomado (capital) somado aos juros devidos :

$$M = C + j = 1500 + 120 = 1620\ reais$$

Resposta : Os juros produzidos foram de R$ 120,00 e o montante pago foi de R$ 1.620,00.

Desse modo, podemos dizer que, se um capital C fica aplicado (ou emprestado) durante um tempo t a uma taxa (unitária) de juros simples de i, então os juros produzidos serão de :

$$\boldsymbol{j = Cit}$$

E o montante ao final do processo será :

$$M = C + j = C + Cit$$

$$\boldsymbol{M = C(1 + it)}$$

sendo que $i\ e\ t$ devem estar na mesma unidade.

Exemplo 10 : Moacir aplicou R$ 840,00 em uma aplicação que rendia 1,2% ao mês de juros simples. Qual o montante que ele resgatará ao fim de dois anos?

Resolução : Neste caso, temos que a taxa está ao mês e o tempo está em anos (não estão na mesma unidade). O ideal, nessas situações, é transformar o tempo para a unidade da taxa. Assim, temos que $C = 840, i = \frac{1{,}2}{100} = 0{,}012\ e\ t = 24$, pois dois anos correspondem a vinte e quatro meses. Aplicando a fórmula acima, temos :

$$M = 840(1 + 0{,}012 \times 24)$$
$$M = 840(1 + 0{,}288)$$
$$M = 840 \times 1{,}288 = 1081{,}92$$

É importante destacar que, no regime de juros simples (não no regime de juros compostos), é possível também utilizar a taxa proporcional à taxa dada, para a unidade de tempo dada. A taxa proporcional a 1,2% ao mês é $(1{,}2 \times 12)\% = 14{,}4\%$ ao ano. Desse modo, poderíamos também realizar o cálculo utilizando $C = 840, i = \frac{14{,}4}{100} = 0{,}144\ e\ t = 2$:

$$M = 840(1 + 0{,}144 \times 2) = 840 \times 1{,}288 = 1081{,}92$$

É preciso ressaltar que este processo de tomar a taxa proporcional NÃO funciona se estivermos trabalhando com juros compostos. Nesse caso, se quisermos transformar a taxa, teremos que calcular a taxa equivalente, que é um conceito mais elaborado. Portanto, para não causar confusões, vemos que o melhor é transformar o tempo. No regime simples, tanto faz. Mas no regime composto, não...

Resposta : Moacir resgatará, ao fim de dois anos, R$ 1.081,92.

Exemplo 11 : Qual é a taxa mensal de juros simples que triplica um capital em 10 meses?

Resolução : Se aplicarmos um capital C, queremos que, ao fim de $t = 10\ me$, o montante seja $M = 3C$. Assim :

$$M = C(1 + it) \Rightarrow 3C = C(1 + i.10) \Rightarrow 1 + 10i = 3 \Rightarrow 10i = 2 \Rightarrow i = 0{,}20$$

Resposta : 20% ao mês.

Exemplo 12 : Maria aplicou 1/3 de seu capital na instituição A, que paga juros simples de 0,8% ao mês. O restante ela aplicou na instituição B, que remunera à taxa simples de 1,2% ao mês. Qual foi o capital aplicado, se ela recebeu, ao fim de 5 meses, R$ 380,00 só de juros?

Resolução : Os juros que ela obteve da instituição A foi : $j_A = \frac{C}{3} \times 0{,}008 \times 5$. Já os juros produzidos na instituição B foram : $j_B = \frac{2C}{3} \times 0{,}012 \times 5$. Mas, sabemos que :

$$j_A + j_B = 380$$

$$\frac{C}{3} \times 0{,}008 \times 5 + \frac{2C}{3} \times 0{,}012 \times 5 = 380$$

$$\frac{0{,}04C + 0{,}12C}{3} = 380 \Rightarrow 0{,}16C = 380 \times 3 \Rightarrow C = \frac{1140}{0{,}16} = 7125$$

Resposta : Capital de R$ 7.125,00

Exercícios Propostos

16) (CEFET/MG – 2013) Uma loja de tecidos comprou uma determinada quantidade de flanela, pagando à vista R$ 500,00. Quinze dias depois, vendeu todo o lote a um comerciante de outra cidade recebendo, também à vista, R$ 650,00. A taxa de juros simples, ao dia, aplicada pelo negociante foi de :
    a) 1%
    b) 2%
    c) 3%
    d) 4%

17) (CEFET/MG – 2011) A quantia de R$ 17.000,00; investida a juros simples de 0,01% ao dia, gera, após 60 dias, um montante de :
    a) R$ 102,00
    b) R$ 1.020,00
    c) R$ 17.102,00
    d) R$ 18.020,00

3.4. Juros Compostos

Nos juros compostos, ao final de cada período de tempo, os juros são incorporados ao capital. E é este "novo capital" que passa a sofrer juros no período seguinte. Por este motivo, esta sistemática de cálculos é, algumas vezes, chamada de "juros sobre juros".

Se um capital C é aplicado em regime de juros compostos à taxa (unitária) i durante um período de tempo t (tempo e taxa na mesma unidade), temos :

Ao fim do primeiro período : $M_1 = C + Ci = C(1+i)$;

Ao fim do segundo período : $M_2 = M_1 + M_1 i = M_1(1+i) = C(1+i)^2$;

Ao fim do terceiro período : $M_3 = M_2 + M_2 i = M_2(1+i) = C(1+i)^3$...

Podemos continuar este processo e inferir que o montante ao final de t períodos de tempo será :

$$\boldsymbol{M = C(1+i)^t}$$

Exemplo 13 : Um capital de R$ 1.800,00 foi aplicado por 3 meses, a uma taxa de juros compostos de 2% ao mês. Qual o montante ao final da aplicação?

Resolução : Aqui, temos $C = 1800, t = 3, i = \frac{2}{100} = 0{,}02$. Assim :

$$M = 1800 \times 1{,}02^3 = 1800 \times 1{,}061208 = 1910{,}17$$

Resposta : Montante de R$ 1.910,17.

Exemplo 14 : Qual é o capital que gera montante de R$ 2.366,33 quando aplicado a 1% ao mês de juros compostos, durante 1 ano?

Resolução : Como foi dito, nos juros compostos, é melhor mudar o tempo. Isso porque usar a taxa proporcional vai dar resultado errado. No sistema simples, taxas proporcionais são equivalentes. O mesmo não ocorre no regime composto. E achar a taxa equivalente aqui será mais complicado. Então, usemos $M = 2366{,}33; i = 0{,}01\ e\ t = 12\ me$:

$$2366{,}33 = C \times (1{,}01)^{12} \Rightarrow C = 2100$$

Resposta : Capital de R$ 2.100,00.

Exercícios Propostos

---

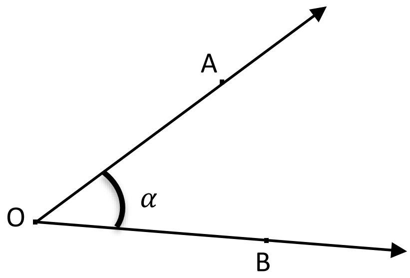
18) (FGV – SP) Uma máquina de lavar roupa é vendida, à vista, por R$ 1.200,00, ou então a prazo com R$ 300,00 de entrada mais uma parcela de R$ 1.089,00 dois meses após a compra. A taxa mensal de juros compostos do financiamento é de :

a) 10%
b) 11%
c) 12%
d) 13%
e) 14%

Capítulo 4 : Ângulos

4.1. Conceito

Chamamos de ÂNGULO à figura formada pela reunião de duas semirretas com a mesma origem. As semirretas constituem os LADOS e a origem comum é o VÉRTICE do ângulo.



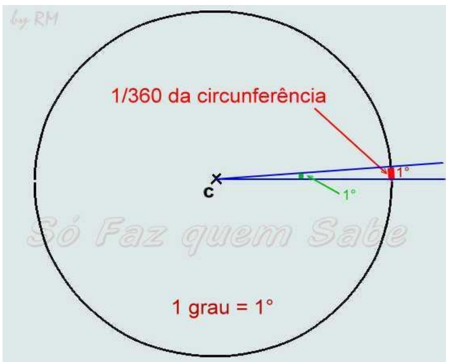
Ângulo $A\hat{O}B$ ou ângulo α
Lados : $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$
Vértice : O

4.2. Unidades de Medida

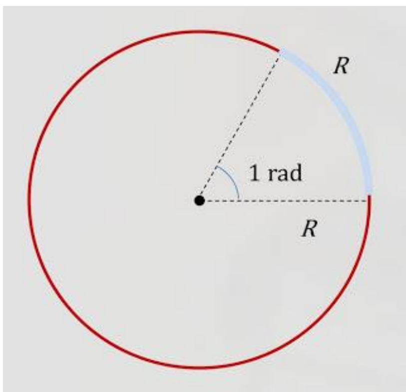
Os ângulos são comumente medidos em GRAUS (º) ou radianos (rad).

Um grau (1^o) é a medida do ângulo central obtido quando se divide uma circunferência em 360 "fatias" iguais.

Um radiano ($1\ rad$) é a medida do ângulo central correspondente a um arco de circunferência de comprimento igual ao raio dela.



Fonte : https://www.sofazquemsabe.com/2012/03/conceito-de-angulo-e-de-sua-medida.html?m=0



Fonte : http://trigonoblog.blogspot.com/2011/02/radianos-graus.html

A conversão de uma unidade para a outra é feita utilizando-se a relação :

$$180^o = \pi \, rad$$

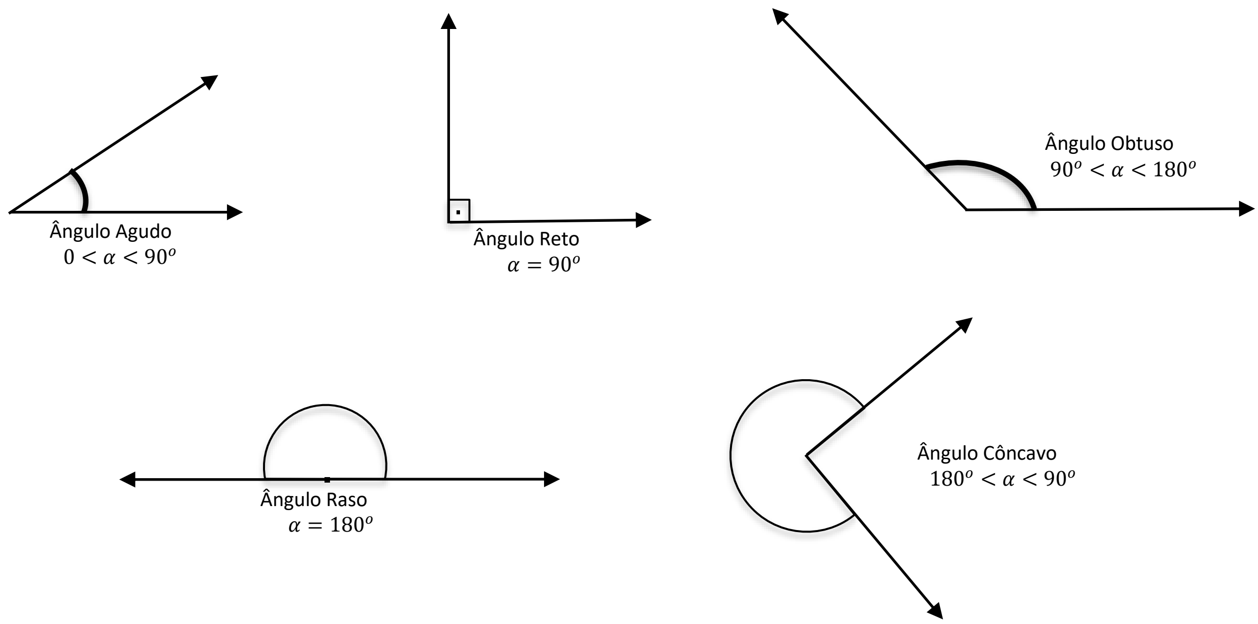
e fazendo-se uma regra de três simples (e direta) com as medidas envolvidas.

Exemplo 1 : Transforme o ângulo de 120^o em radianos.

$$\frac{180^o}{120^o} = \frac{\pi \, rad}{x} \Rightarrow 180^o . x = 120^o . \pi \, rad \Rightarrow x = \frac{120\pi}{180} \, rad = \frac{2\pi}{3} \, rad$$

Resposta : O ângulo de 120^o corresponde a $\frac{2\pi}{3}$ radianos (ou 2,09 radianos, aproximadamente).

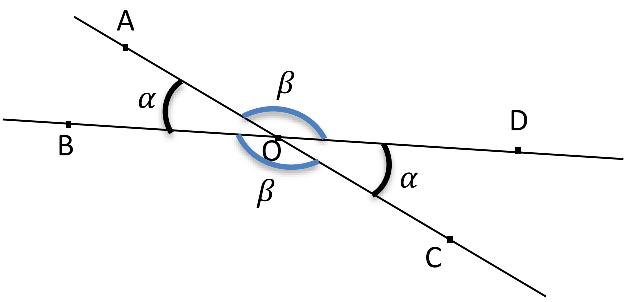
4.3. Classificação dos Ângulos



Ainda temos o ângulo de 0^o (ângulo nulo) e o ângulo de 360^o (ângulo de uma volta).

4.4. Ângulos Opostos pelo Vértice (OPV)

Quando temos duas retas concorrentes, elas formam dois pares de ângulos chamados opostos pelo vértice. Um resultado importante da matemática é que ângulos OPV têm sempre a mesma medida.

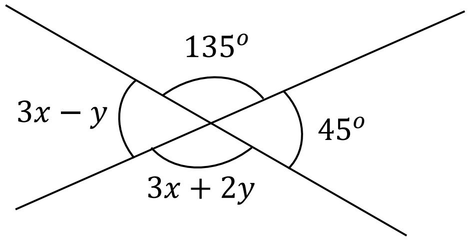


Na figura ao lado, temos :

Os ângulos $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ são opostos pelo vértice. Logo : $A\hat{O}B = C\hat{O}D = \alpha$.

Os ângulos $A\hat{O}D$ e $B\hat{O}C$ são opostos pelo vértice. Logo : $A\hat{O}D = B\hat{O}C = \beta$.

Exemplo 2 : Na figura a seguir, calcule os valores de $x\ e\ y$:



Resolução : Analisando os pares de ângulos OPV, vemos que devemos resolver o seguinte sistema de equações :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 135^o \\ 3x - y = 45^o \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 135^o \\ 6x - 2y = 90^o \end{cases}$$

Somando-se as duas equações, obtemos :

$$9x = 225^o \Rightarrow x = 25^o$$

Substituindo-se o valor de x em uma das duas equações :

$$3 \times 25^o - y = 45^o \Rightarrow -y = 45^o - 75^o \Rightarrow -y = -30^o \Rightarrow y = 30^o$$

Resposta : $x = 25^o$ e $y = 30^o$.

4.5. **Ângulos Complementares** : São dois ângulos cuja soma vale 90^o. Quando dois ângulos são complementares, dizemos que um é o COMPLEMENTO do outro. Exemplo : 60^o é o complemento de 30^o.

4.6. **Ângulos Suplementares** : São dois ângulos cuja soma vale 180^o. Quando dois ângulos são suplementares, dizemos que um é o SUPLEMENTO do outro. Exemplo : 45^o é o suplemento de 135^o.

4.7. **Ângulos Replementares** : São dois ângulos cuja soma vale 360^o. Quando dois ângulos são replementares, dizemos que um é o REPLEMENTO do outro. Exemplo : 120^o é o replemento de 240^o.

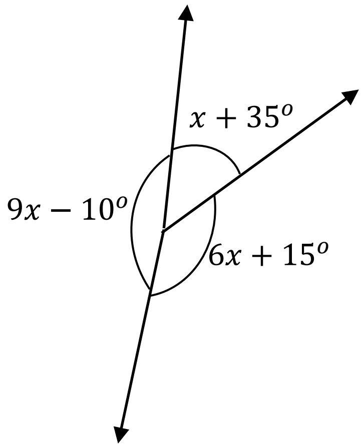
Exemplo 3 : O suplemento de um ângulo é igual ao seu sêxtuplo somado ao seu complemento. Qual é o valor deste ângulo?

Resolução : Ao chamarmos o ângulo desconhecido de x, temos que o seu suplemento será dado por $(180^o - x)$, seu sêxtuplo será $(6x)$ e seu complemento será $(90^o - x)$. Assim :

$$180^o - x = 6x + 90^o - x$$
$$-x - 6x + x = 90^o - 180^o$$
$$-6x = -90^o$$
$$6x = 90^o$$
$$x = 15^o$$

Resposta : O ângulo mede 15^o.

Exemplo 4 : Na figura a seguir, determine o valor de x e de cada ângulo mostrado :



Resolução : Vemos que os três ângulos somam 360^o (1 volta). Assim :

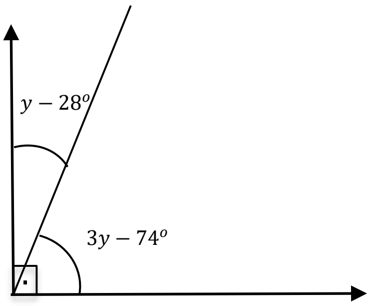
$$x + 35^o + 6x + 15^o + 9x - 10^o = 360^o$$
$$16x = 320^o$$
$$x = 20^o$$

Então :

$$x + 35^o = 20^o + 35^o = 55^o$$
$$6x + 15^o = 120^o + 15^o = 135^o$$
$$9x - 10^o = 180^o - 10^o = 170^o$$

Resposta : Temos que $x = 20^o$ e os ângulos da figura são de $55^o, 135^o\ e\ 170^o$.

Exemplo 5 : Na figura a seguir, calcule o valor de y e o valor do menor ângulo mostrado :



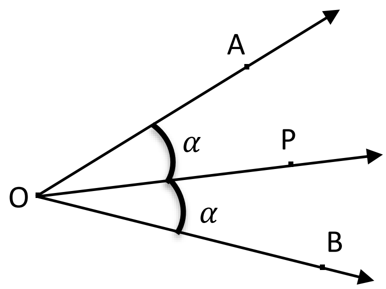
Resolução : Vemos que os ângulos são complementares. Assim :

$$y - 28^o + 3y - 74^o = 90^o$$
$$4y = 192^o$$
$$y = 48^o$$

Logo : $y - 28^o = 48^o - 28^o = 20^o$.

Resposta : $y = 48^o$ e o menor ângulo da figura mede 20^o.

4.8. **Bissetriz de um Ângulo** : Semirreta que o divide ao meio.



$\overrightarrow{OP}$ é a bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$, ou seja, $A\hat{O}P = B\hat{O}P = \alpha$.

4.9. Submúltiplos do Grau

Existem medidas menores que o grau. São elas o MINUTO e o SEGUNDO, definidas por :

$$1^o = 60' \ e \ 1' = 60"$$

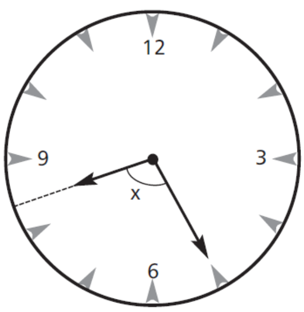
Assim, um ângulo de medida $27^o 12' 25"$ tem 27 graus, 12 minutos e 25 segundos.

Exercícios Propostos

1) (CEFET/MG – 2017) Sejam dois ângulos $x \ e \ y$ tais que $(2x) \ e \ (y + 10^o)$ são ângulos complementares e $(5x) \ e \ (3y - 40^o)$ são suplementares. O ângulo x mede :
   a) 5^o
   b) 10^o
   c) 15^o
   d) 20^o

2) (CEFET/MG – 2019) Considere $\theta \ e \ \alpha$ dois ângulos adjacentes e complementares. A expressão que determina o valor do ângulo formado pelas bissetrizes de $\theta \ e \ \alpha$ é :
   a) $\frac{\theta+\alpha}{2}$
   b) $\frac{\theta+\alpha}{4}$
   c) $\frac{90^o-(\theta+\alpha)}{2}$
   d) $\frac{90^o-(\theta+\alpha)}{4}$

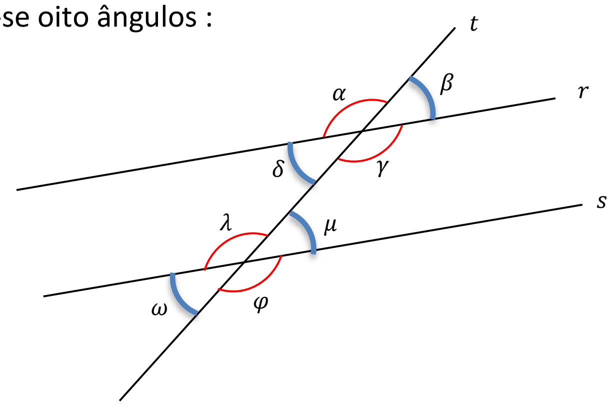
3) (CEFET/MG – 2013) Se o relógio da figura marca 8h e 25min, então o ângulo x formado pelos ponteiros é :



   a) $12^o 30'$
   b) 90^o
   c) $102^o 30'$
   d) 120^o

4.10. Ângulos Determinados por Duas Paralelas e Uma Transversal

Quando duas retas paralelas são interceptadas por uma reta transversal, determinam-se oito ângulos :



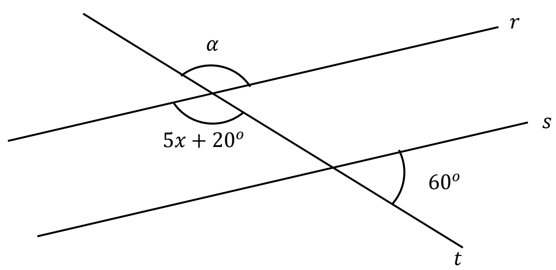
Estes ângulos recebem nomes especiais. Podem ser :

A) **Correspondentes** : Estão do mesmo lado da transversal (à direita ou à esquerda) e do mesmo lado das paralelas (acima ou abaixo). **Resultado importante : ângulos correspondentes têm a mesma medida.** Desse modo, na figura acima, temos : $\alpha = \lambda, \beta = \mu, \gamma = \varphi \; e \; \delta = \omega$, pois são pares de ângulos correspondentes.

B) **Alternos** : Estão em lados alternados da transversal. **Resultado importante : ângulos alternos têm a mesma medida.** Se subdividem em :
B.1. **Alternos Internos** : Localizam-se na parte interna da "faixa" determinada pelas paralelas. Na figura, são pares de alternos internos : $\gamma = \lambda \; e \; \delta = \mu$.
B.2. **Alternos Externos** : Localizam-se na parte externa da faixa determinada pelas paralelas. Na figura, são pares de alternos externos : $\alpha = \varphi \; e \; \beta = \omega$.

C) **Colaterais** : Estão do mesmo lado da transversal. **Resultado importante : ângulos colaterais são suplementares.** Se subdividem em :
C.1. **Colaterais Internos** : Localizam-se na parte interna da "faixa" determinada pelas paralelas. Na figura, são pares de colaterais internos : $\delta + \lambda = 180^o \; e \; \gamma + \mu = 180^o$.
C.2. **Colaterais Externos** : Localizam-se na parte externa da "faixa" determinada pelas paralelas. Na figura, são pares de colaterais externos : $\alpha + \omega = 180^o \; e \; \beta + \varphi = 180^o$.

Exemplo 6 : Na figura a seguir, determine o valor de x e do ângulo desconhecido, sabendo que $r//s$:

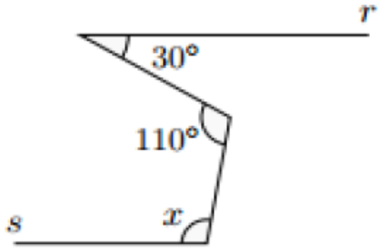


Veja que o ângulo α foi marcado apenas para auxiliar na resolução. Temos que os ângulos $\alpha \; e \; 5x + 20^o$ são opostos pelo vértice. Portanto : $\alpha = 5x + 20^o$. Além disso, vemos que $\alpha \; e \; 60^o$ são ângulos colaterais externos. Logo : $\alpha + 60^o = 180^o$. Assim, substituindo a primeira equação na segunda, temos :

$$5x + 20^o + 60^o = 180^o$$
$$5x = 100^o \Rightarrow x = 20^o$$

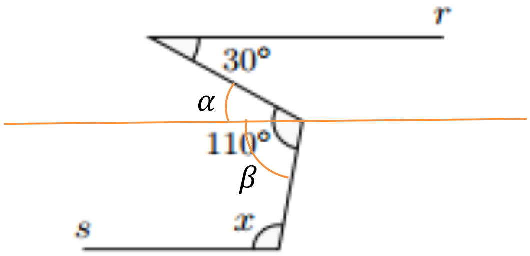
E : $5x + 20^o = 5 \times 20^o + 20^o = 100^o + 20^o = 120^o$.

Exemplo 7 : Determine x, sendo $r//s$:



Disponível em : https://portaldaobmep.impa.br/uploads/msg/rqb1ihzomvrc.pdf

Primeiramente, vamos reproduzir a figura e traçar uma reta "auxiliar", paralela às outras duas, que determinará os ângulos α e β :



Vemos que os ângulos α e 30^o são alternos internos, Logo : $\alpha = 30^o$. Já β e x são colaterais internos. Então : $\beta + x = 180^o \Rightarrow \beta = 180^o - x$. E, pela figura, vemos que $\alpha + \beta = 110^o$. Assim :

$$30^o + 180^o - x = 110^o$$
$$-x = 110^o - 30^o - 180^o$$
$$-x = -100^o$$
$$x = 100^o$$

Capítulo 5 : Unidades de Medida, Teorema de Tales

5.1. Medidas de Comprimento

Utilizadas em medidas lineares. A unidade fundamental é o metro (m). Como múltiplos do metro, temos : decâmetro (dam), hectômetro (hm) e quilômetro (km). Já como submúltiplos, temos : decímetro (dm), centímetro (cm) e milímetro (mm). Ao passar de uma unidade para outra imediatamente inferior, multiplicamos por 10. Já para a passagem para uma unidade imediatamente superior, dividimos por 10. Por exemplo, $10\ m$ correspondem a $1\ dam$, enquanto que $12{,}4\ cm$ equivalem a $124\ mm$.

Ao invés de ficar memorizando "regras", o melhor a fazer é ter em mente o quadro seguinte :

km	hm	dam	$\boldsymbol{m}$	dm	cm	mm

Para converter medidas, basta posicioná-la nele e "deslocar" a vírgula.

Exemplo 1 : Transformar $25{,}3\ m$ em km.

Passo 1 : Posicionamos a medida no quadro. A vírgula é colocada na casa indicada na medida original (no caso, metro). Cada algarismo preenche uma casa :

km	hm	dam	$\boldsymbol{m}$	dm	cm	mm
		2	**5,**	3		

Passo 2 : A vírgula é transferida para a casa para a qual queremos transformar a medida :

km	hm	dam	$\boldsymbol{m}$	dm	cm	mm
,		2	**5**	3		

A vírgula é transferida de m para km

Passo 3 : Completam-se as casas "vazias" com zeros :

km	hm	dam	$\boldsymbol{m}$	dm	cm	mm
0,	0	2	**5**	3		

Resposta : $25{,}3\ m$ correspondem a $0{,}0253\ km$.

Exemplo 2 : Expressar, em centímetros, a medida de $36\ dam$.

Quando não há vírgula, entendemos que ela está após o último algarismo. Posicionamos, então, a medida no quadro :

km	hm	dam	$\boldsymbol{m}$	dm	cm	mm
	3	6,				

Agora transferimos a vírgula para a casa desejada e completamos as casas vazias com zeros :

km	hm	dam	$\boldsymbol{m}$	dm	cm	mm
	3	6	**0**	0	0,	

Resposta : 36 dam correspondem a 36.000 cm.

5.2. Medidas de Massa

Unidade fundamental : grama (g).
Múltiplos : decagrama (dag), hectograma (hg) e quilograma (kg).
Submúltiplos : decigrama (dg), centigrama (cg) e miligrama (mg).
Para transformar medidas, procede-se da mesma forma da seção anterior.

Exemplo 3 : Expressar 354,8 dg em hg.
Resolução :

kg	hg	dag	$\boldsymbol{g}$	dg	cg	mg
		3	**5**	4,	8	

Transfere-se a vírgula

kg	hg	dag	$\boldsymbol{g}$	dg	cg	mg
	0,	3	**5**	4	8	

Resposta : $354{,}8\ dg = 0{,}3548\ hg$.

5.3. Medidas de Capacidade

Unidade fundamental : litro (L).
Múltiplos : decalitro (daL), hectolitro (hL) e quilolitro (kL).
Submúltiplos : decilitro (dL), centilitro (cL) e mililitro (mL).
Para transformar medidas, procede-se da mesma forma das seções anteriores.

Exemplo 4 : Expressar 1.585 mL em daL.
Resolução :

kL	hL	daL	$\boldsymbol{L}$	dL	cL	mL
			1	5	8	5,

Transfere-se a vírgula

kL	hL	daL	$\boldsymbol{L}$	dL	cL	mL
		0,	**1**	5	8	5

Resposta : $1.585\ mL = 0{,}1585\ daL$.

5.4. Medidas de Superfície

Utilizadas em medidas de áreas.

Unidade fundamental : metro quadrado (m^2).

Múltiplos : decâmetro quadrado (dam^2), hectômetro quadrado (hm^2) e quilômetro quadrado (km^2).

Submúltiplos : decímetro quadrado (dm^2), centímetro quadrado (cm^2) e milímetro quadrado (mm^2).

Ao realizar transformações, lembrar-se que, aqui, são colocados dois algarismos dentro de cada coluna do quadro.

Exemplo 5 : Carlos tem um apartamento de $48\ m^2$. Qual é a medida dessa área em centímetros quadrados ?

Resolução :

km^2	hm^2	dam^2	$\boldsymbol{m^2}$	dm^2	cm^2	mm^2
			48,			

Transfere-se a vírgula

km^2	hm^2	dam^2	$\boldsymbol{m^2}$	dm^2	cm^2	mm^2
			48	00	00,	

Resposta : $480.000\ dm^2$.

5.5. Medidas de Volume

Utilizadas em medidas de volumes de sólidos.

Unidade fundamental : metro cúbico (m^3).

Múltiplos : decâmetro cúbico (dam^3), hectômetro cúbico (hm^3) e quilômetro cúbico (km^3).

Submúltiplos : decímetro cúbico (dm^3), centímetro cúbico (cm^3) e milímetro cúbico (mm^3).

Ao realizar transformações, lembrar-se que, aqui, são colocados três algarismos dentro de cada coluna do quadro.

Exemplo 6 : Um volume de $1230\ km^3$ corresponde a quantos metros cúbicos?

Resolução :

	km^3	hm^3	dam^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3
1	230,						

Transfere-se a vírgula

Veja que, aqui, foi necessário colocar o algarismo 1 fora do quadro.

	km^3	hm^3	dam^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3
1	230	000	000	000,			

Resposta : $1.230\ km^3 = 1{,}23 \times 10^{12}\ m^3$.

Relação entre Capacidade e Volume

Medidas de capacidade e de volume são, na verdade, “a mesma coisa”. Geralmente, usam-se as unidades de capacidade para a medição de líquidos e gases, enquanto que as unidades de volume são mais usadas para medir o “espaço ocupado” por sólidos. Mas é possível converter uma na outra, através da importante relação abaixo :

$$\mathbf{1\ dm^3 = 1L}$$

Vejamos alguns exemplos :

Exemplo 7 : Uma caixa d’água de volume $1\ m^3$ tem uma capacidade de quantos litros ?

Resolução : Primeiramente, transformamos $1\ m^3$ em dm^3. Utilizando o quadro da seção anterior, vemos facilmente que : $1\ m^3 = 1.000\ dm^3$ (faça). Como 1 decímetro cúbico é o mesmo que 1 litro, temos que $1.000\ dm^3 = 1.000\ L$.

Resposta : Uma caixa d’água de 1 metro cúbico tem uma capacidade de 1.000 litros.

Exemplo 8 : Temos, em laboratório; 2,35 dm^3 de um líquido. Em mililitros, temos...

Resolução : Pela relação dada, sabemos que 2,35 $dm^3 = 2{,}35\ L$. E, utilizando o quadro da seção 5.3, podemos transformar a medida dada de litros para mililitros, obtendo : 2,35 $dm^3 = 2{,}35\ L = 2.350\ mL$.

Resposta : 2.350 mL.

5.6. Medidas de Tempo

Para trabalhar com medidas de tempo, utilizamos as relações já conhecidas do nosso dia-a-dia : $1\ min = 60\ s, 1\ h = 60\ min, 1\ d = 24\ h, 1\ me = 30\ d, 1\ a = 12me$, etc...

Podemos querer transformar uma medida de tempo mista em uma medida única ou vice-versa. Vejamos os exemplos dados :

Exemplo 9 : O tempo de $12d\ 20h\ 50min$ é equivalente a quantos segundos?

Resolução : Aqui, queremos transformar uma medida mista numa medida única, numa unidade menor (o segundo). Nesse caso, pegamos cada parte da medida e convertemos para a unidade que queremos :

a) Para passar de dias para horas, multiplicamos por 24. De hora para minuto, multiplicamos por 60 e, de minuto para segundo, multiplicamos de novo por 60. Assim : $12d = (12 \times 24 \times 60 \times 60)s = 1.036.800s$
b) Para a parte das horas, temos : $20h = (20 \times 60 \times 60)s = 72.000s$
c) Para a parte dos minutos : $50min = (50 \times 60)s = 3.000s$

Para obter o total de segundos, somamos os valores obtidos em a, b e c :

$$(1036800 + 72000 + 3000)s = 1111800s$$

Resposta : $12d\ 20h\ 50min$ equivalem a $1.111.800s$.

Exemplo 10 : Expresse um tempo de 220.000 minutos na forma mista.

Resolução : Para transformar uma unidade para outra "maior", devemos, agora, dividir. Assim, para passar a medida de minutos para horas, devemos dividir por 60. Vamos obter um quociente (número de horas) e um resto em minutos. Este quociente deverá ser dividido por 24, para a obtenção do número de dias, e assim por diante. Desse modo, faremos a sequência de divisões abaixo :

```
220’0’0’0’min |_60________
 400             36’6’6’h |_24______
  400            126         152’d |_30____
   400              66          2d    5me
    40min           18h
```

Resposta : $220.000\ min$ equivalem a $5me\ 2d\ 18h\ 40min$.

5.7. Medidas de Ângulo

A unidade fundamental é o grau. Os submúltiplos são o minuto e o segundo. As relações são : $1^o = 60'\ e\ 1' = 60"$. Procedemos, assim, de forma bem parecida ao que foi feito para tempo.

Exemplo 11 : Expresse, na forma mista, um ângulo de $125.300"$.

Resolução :

```
125’3’0’0’ |_60_____
  530        208’8’ |_60____
   500        288     34º
    20”        48’
```

Resposta : $125.300"$ equivalem a $34^o\ 48'\ 20"$.

Outras Conversões

Existem grandezas que envolvem duas unidades de grupos diferentes. Como exemplo, podemos citar a densidade e a velocidade. Vamos realizar algumas conversões envolvendo estas grandezas.

Exemplo 12 : A densidade do ferro (Fe) é de $7{,}874\ g/cm^3$. Converta a densidade do ferro para kg/m^3.

Resolução : $\frac{7{,}874g}{1cm^3} = \frac{0{,}007874kg}{0{,}000001m^3} = 7874\ kg/m^3$

Exemplo 13 : Um corpo que se move a $24\ m/s$ desenvolve uma velocidade de quantos quilômetros por hora?

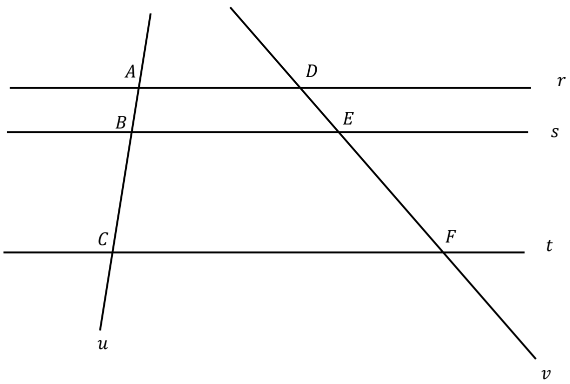
Resolução : $\frac{24m}{1s} = \frac{0{,}024km}{\frac{1}{60\times 60}h} = 0{,}024 \times 3600 = 24 \times 10^{-3} \times 3{,}6 \times 10^3 = 24 \times 3{,}6 = 86{,}4\ km/h.$

OBS : O cálculo acima mostra que é válido aquele “macete” que existe em alguns livros e manuais : para passar de m/s para km/h, basta multiplicar por 3,6. Já para passar de km/h para m/s, dividimos por 3,6.

5.8. Teorema de Tales

Este é um teorema muito importante para a resolução de vários problemas matemáticos. Basicamente, ele nos diz que, num feixe de retas paralelas, retas transversais determinam segmentos correspondentes proporcionais.

Consideremos, por exemplo, um feixe de três retas paralelas ($r, s\ e\ t$), e duas transversais ($u\ e\ v$). As relações a seguir mostram a proporcionalidade dos segmentos correspondentes determinados pelas duas transversais :



Algumas relações possíveis :

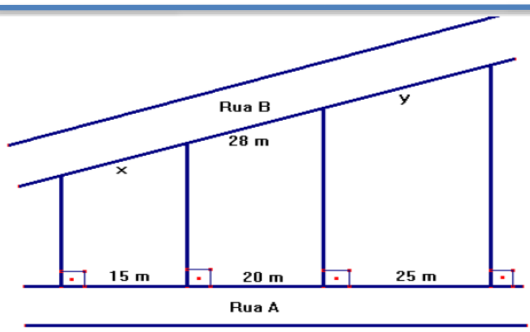
$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$$

$$\frac{BC}{AC} = \frac{EF}{DF}$$

Vamos resolver algumas questões :

Exemplo 14 : A figura indica três lotes de terreno com frente para a rua A e para a rua B. As divisas dos lotes são perpendiculares à rua A. As frentes dos lotes 1,2 e 3 para a rua A medem, respectivamente, 15m, 20m e 25m. A frente do lote 2 para a rua B mede 28m. Qual é a medida da frente, para a rua B, dos lotes 1 e 3?



Disponível em : http://www.colegiosalesiano.com.br/arquivos/site/listateorema-de-tales.pdf

Resolução : Vemos que as divisas dos terrenos formam um feixe de quatro retas paralelas, pois todas são perpendiculares à rua A. E as ruas A e B são duas retas transversais ao feixe. Logo, o Teorema de Tales é uma boa ferramenta para resolver a questão.

Olhando para as três primeiras paralelas (da esquerda para a direita), podemos montar a seguinte proporção :

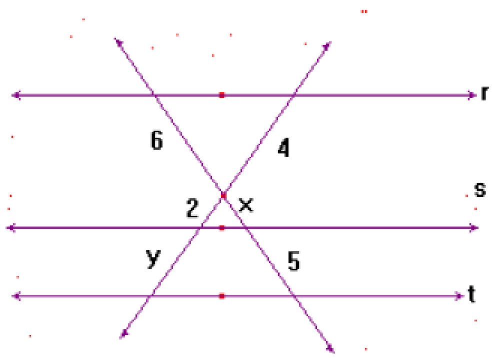
$$\frac{15}{20} = \frac{x}{28} \Rightarrow 20x = 15 \times 28 \Rightarrow x = \frac{420}{20} = 21\ m$$

Olhando para as três últimas paralelas, podemos montar a proporção :

$$\frac{20}{25} = \frac{28}{y} \Rightarrow 20y = 25 \times 28 \Rightarrow y = \frac{700}{20} = 35\ m$$

Resposta : As medidas são 21m e 35m.

Exemplo 15 : Determine $x\ e\ y$, sabendo que as retas $r, s\ e\ t$ são paralelas :

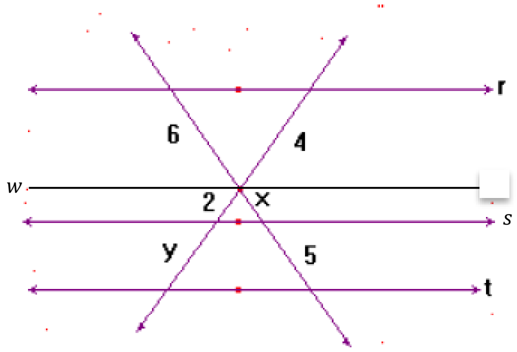


Disponível em : http://www.colegiosalesiano.com.br/arquivos/site/listateorema-de-tales.pdf

Resolução : Primeiramente, vemos que o fato de as transversais se cruzarem pode trazer um pouco de “confusão”. Os segmentos determinados pela primeira transversal sobre o feixe são $(6 + x)\ e\ 5$. Já os segmentos determinados pela segunda transversal são $(4 + 2)\ e\ y$. Assim, a proporção correta, pelo Teorema de Tales, é :

$$\frac{6 + x}{5} = \frac{6}{y} \Rightarrow (6 + x).y = 30$$

Para obter uma outra relação envolvendo x, podemos traçar uma outra paralela às retas do feixe passando pelo ponto de interseção das transversais (reta w) :



Olhando para o feixe de retas r, w, s e para as duas transversais temos, pelo Teorema de Tales :

$$\frac{6}{x} = \frac{4}{2} \Rightarrow 4x = 12 \Rightarrow x = 3$$

Substituindo na primeira equação obtida :

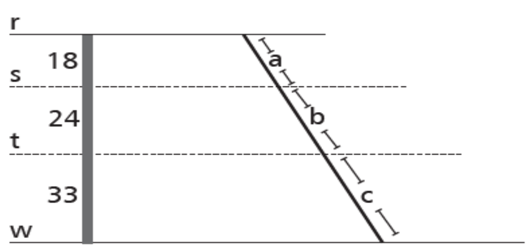
$$(6+3)y = 30 \Rightarrow 9y = 30 \Rightarrow y = \frac{30}{9} = \frac{10}{3}$$

Resposta : $x = 3 \; e \; y = \frac{10}{3}$.

Exercícios Propostos

1) Em cada caso, realize a conversão de unidade pedida :
   a) $53{,}4cm$ em km
   b) $126{,}32hg$ em dg
   c) $53{,}4cm^2$ em km^2
   d) $15m^3$ em L
   e) $4536mL$ em dam^3
   f) $8d\ 12h\ 48min$ em s
   g) 3798" em medida mista
   h) $45{,}6cm/s$ em km/h

2) (CEFET/MG – 2015) Na figura a seguir, as retas $r, s, t \; e \; w$ são paralelas e $a, b \; e \; c$ representam medidas dos segmentos tais que $a + b + c = 100$:



Conforme esses dados, os valores de $a, b \; e \; c$ são, respectivamente, iguais a :

a) 24, 32 e 44
b) 24, 36 e 40
c) 26, 30 e 44
d) 26, 34 e 40

3) (CEFET/MG – 2014) Uma construtora dividiu um terreno de um quilômetro quadrado em 400 lotes de mesma área, e colocou-os à venda ao preço de R$ 90,00 o metro quadrado. O valor de venda, em reais, para cada lote foi de :
   a) 175.000
   b) 225.000
   c) 275.000
   d) 325.000

4) (CEFET/MG – 2011) Um ciclista partiu do centro de Belo Horizonte até a Serra do Cipó, percorrendo 100 km em 4 horas e retornou ao local de origem, gastando 5 horas. Portanto, a velocidade média durante todo esse trajeto, em km/h, foi de :
   a) 50/3
   b) 200/9
   c) 250/9
   d) 100/3

Capítulo 6 : Triângulos

6.1. Conceito e Classificação

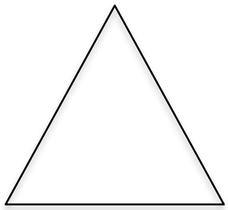
O polígono de três lados é chamado de TRIÂNGULO. Os triângulos podem ser classificados segundo dois critérios : quanto aos lados e quanto aos ângulos.

Quanto aos lados, podemos ter :

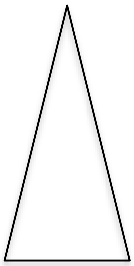
Triângulo Equilátero : Possui os três lados com a mesma medida.

Triângulo Isósceles : Possui dois lados com a mesma medida. O lado que possui medida diferente dos outros dois é chamado de BASE do triângulo isósceles.

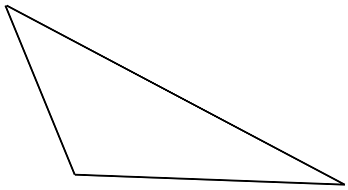
Triângulo Escaleno : Possui três lados com medidas diferentes.



Triângulo Equilátero



Triângulo Isósceles



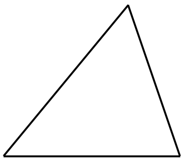
Triângulo Escaleno

Quanto aos ângulos, podemos ter :

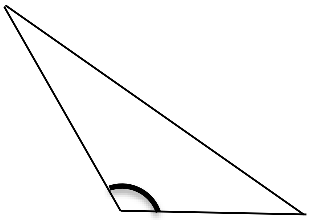
Triângulo Acutângulo : Possui três ângulos agudos.

Triângulo Obtusângulo : Possui um ângulo obtuso.

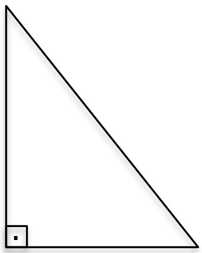
Triângulo Retângulo : Possui um ângulo reto.



Triângulo Acutângulo

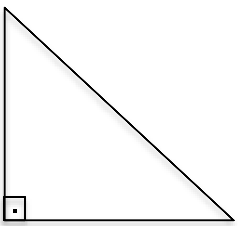


Triângulo Obtusângulo
(o ângulo marcado é obtuso)

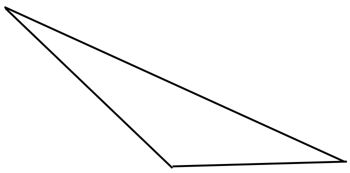


Triângulo Retângulo
(o símbolo de ângulo reto, na matemática, é ⊡)

Deste modo, todo triângulo pode ser duplamente classificado (segundo os dois critérios) :



Triângulo Retângulo Isósceles

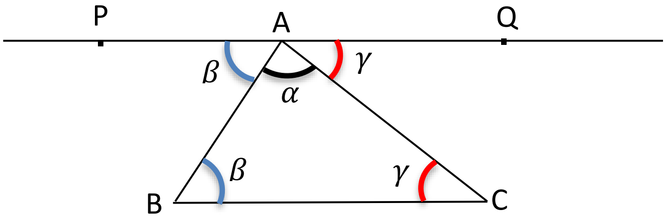


Triângulo Obtusângulo Escaleno

A seguir, estão colocadas duas propriedades importantes de qualquer triângulo :

Propriedade 1 : Em qualquer triângulo, a soma dos ângulos internos é 180^o.

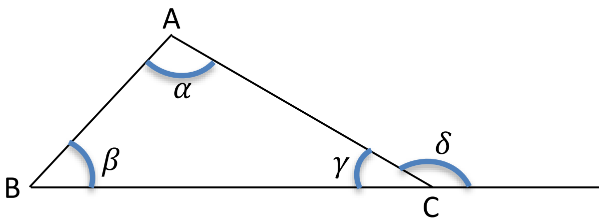
Prova : Tomemos um triângulo qualquer ABC, traçando, pelo vértice A, uma paralela ao lado BC :



Como $\overleftrightarrow{PQ}//\overleftrightarrow{BC}$, temos que $P\hat{A}B = A\hat{B}C = \beta$, pois são ângulos alternos internos. Pelo mesmo motivo, temos que $Q\hat{A}C = A\hat{C}B = \gamma$. Além disso, os ângulos $P\hat{A}B, B\hat{A}C$ e $Q\hat{A}C$ formam um ângulo raso, mostrando que, realmente, $\alpha + \beta + \gamma = 180^o$.

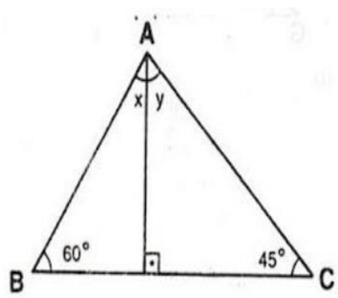
Propriedade 2 : Num triângulo, um ângulo externo é igual à soma dos dois internos não adjacentes a ele.

Prova : Tomemos um triângulo qualquer ABC, onde δ é um ângulo externo e α, β e γ são seus ângulos internos :



Pela propriedade anterior, sabemos que $\alpha + \beta + \gamma = 180^o$. Além disso, γ e δ são ângulos suplementares, ou seja, $\gamma + \delta = 180^o$. Comparando as duas equações obtidas, vemos que : $\gamma + \delta = \alpha + \beta + \gamma \Rightarrow \delta = \alpha + \beta$, que era o que queríamos mostrar.

Exemplo 1 : Na figura, calcule os valores dos ângulos x e y :

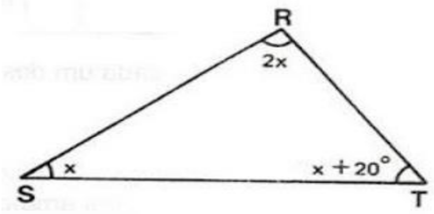


Resolução : Aplicando-se a Propriedade 1 aos dois triângulos da figura, temos que :

$$x + 90^o + 60^o = 180^0 \Rightarrow x = 180^o - 90^o - 60^o \Rightarrow x = 30^o$$

$$y + 90^o + 45^o = 180^o \Rightarrow y = 180^o - 90^o - 45^o \Rightarrow y = 45^o$$

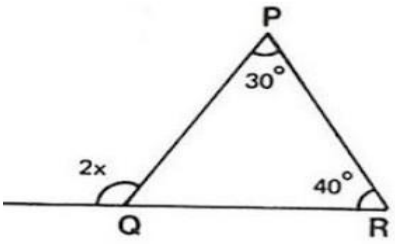
Exemplo 2 : Na figura, calcule o valor de x :



Resolução :

$$x + 2x + x + 20^o = 180^o$$
$$4x = 160^o$$
$$x = 40^o$$

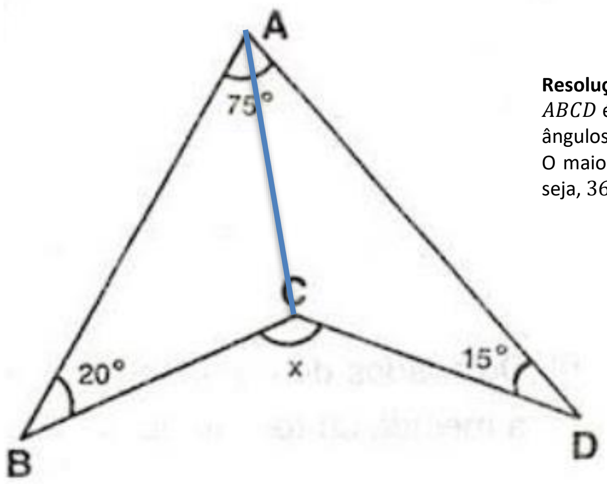
Exemplo 3 : Calcule x :



Resolução : Pela Propriedade 2 :

$$2x = 30^o + 40^o$$
$$2x = 70^o$$
$$x = 35^o$$

Exemplo 4 : Calcule x :



Resolução : Traçando o segmento AC, vemos que o quadrilátero $ABCD$ é constituído de dois triângulos. Logo, a soma de seus ângulos internos é de : $180^o + 180^o = 360^o$.
O maior ângulo do quadrilátero é o replemento do ângulo x, ou seja, $360^o - x$. Logo, temos :

$$75^o + 20^o + 15^o + 360^o - x = 360^o$$
$$110^o - x = 0$$
$$-x = -110^o$$
$$x = 110^o$$

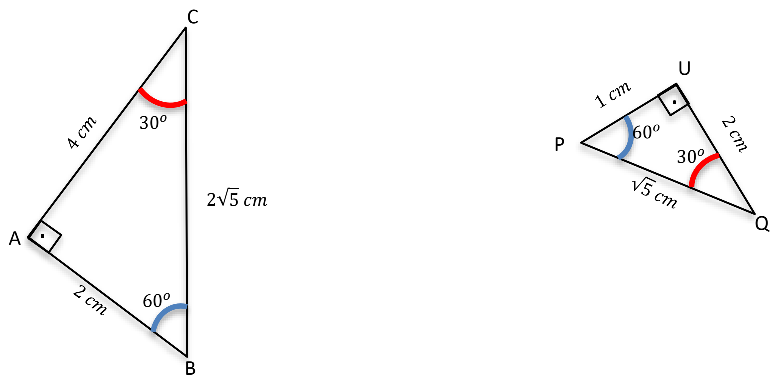
Questões disponíveis em : http://134350001.s3-sa-east-1.amazonaws.com/domaguirre/wp-content/uploads/2013/08/Lista-de-Exerc%C3%ADcios-Tri%C3%A2ngulos-2.pdf

6.2. Semelhança de Triângulos

Conceito : Dizemos que dois polígonos são SEMELHANTES quando é possível encontrar uma correspondência entre seus vértices de modo que ângulos correspondentes sejam IGUAIS e lados correspondentes sejam PROPORCIONAIS.

De modo informal, dois polígonos são semelhantes quando têm o mesmo "formato", quando um é apenas uma ampliação ou redução do outro, mantendo os mesmos ângulos e uma proporcionalidade dos lados. É o que acontece quando, por exemplo, tiramos uma "foto". A foto é, geralmente, uma versão reduzida do objeto original, mas mantém a "forma" do mesmo.

Estudaremos aqui as particularidades da semelhança aplicada a triângulos. Observemos os dois triângulos a seguir :



Vamos estabelecer a seguinte correspondência entre os vértices deles : $A \to U,\ B \to P\ e\ C \to Q$. Feita esta correspondência, observamos que :

$\hat{A} = \hat{U} = 90^o, \hat{B} = \hat{P} = 60^o\ e\ \hat{C} = \hat{Q} = 30^o$ (ângulos correspondentes são iguais).

$\frac{AB}{UP} = \frac{2\ cm}{1\ cm} = 2, \frac{AC}{UQ} = \frac{4\ cm}{2\ cm} = 2\ e\ \frac{BC}{PQ} = \frac{2\sqrt{5}\ cm}{\sqrt{5}\ cm} = 2,$ ou seja, $\frac{AB}{UP} = \frac{AC}{UQ} = \frac{BC}{PQ} = 2$ (lados correspondentes formam uma proporção de razão 2).

Isso nos mostra que o triângulo ABC é SEMELHANTE ao triângulo UPQ. Vemos que os dois têm o mesmo "formato". O primeiro, na verdade, é uma "ampliação" do segundo em duas vezes.

Em figuras semelhantes, a razão comum entre os lados será chamada de RAZÃO DE SEMELHANÇA, e denotada por k. No caso acima, temos $k = 2$, mostrando que um dos triângulos é a ampliação do outro em duas vezes. Se $k = 3$, um é a ampliação do outro em três vezes, e assim por diante. Além disso, se a razão entre duas figuras planas semelhantes é k, então a razão entre suas áreas será k^2. Assim, ampliar um triângulo em duas vezes não significa dobrar a sua área, e sim quadruplicá-la. Ampliar uma figura plana em três vezes não significa triplicar sua área, e sim multiplicá-la por nove. E assim por diante...

Indicamos a semelhança de figuras pelo símbolo (~). Desse modo, para indicar que os dois triângulos acima são semelhantes, escrevemos : $\Delta ABC \sim \Delta UPQ$ (leia : o triângulo ABC é semelhante ao triângulo UPQ). Veja que, ao indicar a semelhança, é conveniente colocar os vértices do triângulo de tal forma que vejamos a correspondência entre eles que estabelece a semelhança. Isso facilita bastante para identificarmos, pela própria notação, quais ângulos e quais lados são correspondentes.

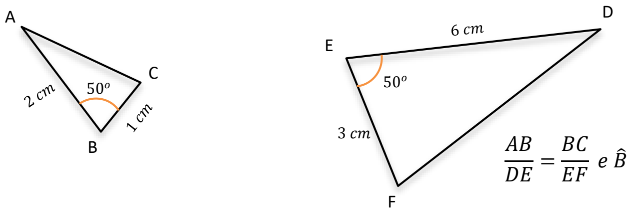
Se a razão entre duas figuras semelhantes é $k = 1$, temos que, na verdade, uma é cópia exata da outra. O termo utilizado para indicar isso é dizer que as duas figuras são CONGRUENTES. Logo, podemos ver a congruência como um caso especial de semelhança.

Neste ponto, pode surgir a seguinte indagação, para o caso específico de triângulos : será que é preciso verificar todas as seis igualdades mostradas acima para concluir que dois triângulos são semelhantes? Felizmente, a resposta é NÃO! Existem resultados interessantes da matemática (que não serão provados aqui) que estabelecem critérios especiais para a verificação da semelhança de triângulos. São os CASOS DE SEMELHANÇA, objeto da próxima seção.

6.3. Casos de Semelhança de Triângulos

6.3.1. **Caso LAL (Lado-Ângulo-Lado)** : Se dois triângulos têm dois pares de lados em proporção e os ângulos formados por esses pares de lados iguais, então eles são semelhantes.

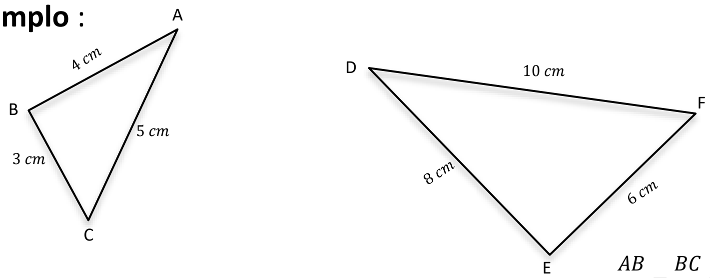
Exemplo :



$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}\ e\ \hat{B} = \hat{E} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$$

6.3.2. **Caso LLL (Lado-Lado-Lado)** : Se, em dois triângulos, verifica-se uma proporção com os três pares de lados, então eles são semelhantes.

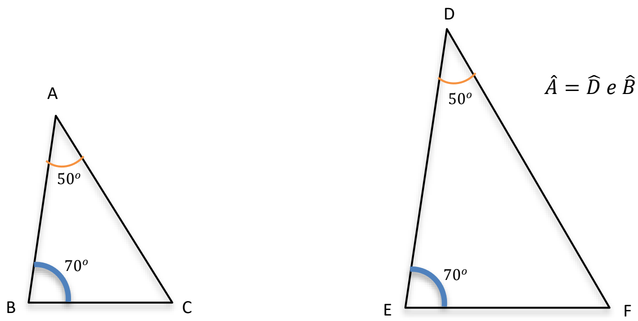
Exemplo :



$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$$

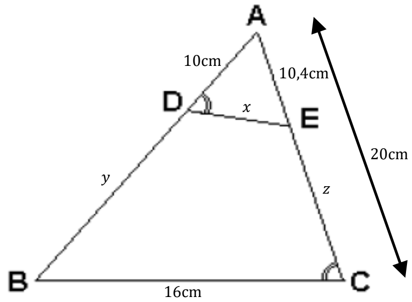
6.3.3. **Caso AA (Ângulo-Ângulo)** : Se dois triângulos têm dois pares de ângulos respectivamente iguais, então eles são semelhantes.

Exemplo :



$$\hat{A} = \hat{D}\ e\ \hat{B} = \hat{E} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$$

Exemplo 5 (PUC – Camp – Adapt) Na figura, temos que $A\hat{D}E = A\hat{C}B$, $BC = 16cm$, $AC = 20cm$, $AD = 10cm$ e $AE = 10{,}4cm$. Qual é o perímetro do quadrilátero $BCED$?



Disponível em : http://www.educacional.com.br/upload/blogSite/8227/8227321/26265/Lista%20052232012215421.pdf

Resolução : Temos que os ângulos $A\widehat{D}E$ e $A\hat{C}B$ são iguais (informação da questão). Além disso, o ângulo $B\hat{A}C$ é comum aos dois triângulos da figura. Logo, podemos concluir, pelo caso AA, que $\Delta ADE \sim \Delta ACB$. Da semelhança, podemos escrever (lembrado que, a ângulos iguais, opõem-se lados proporcionais) :

$$\frac{AE}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AC} \; ou \; \frac{10,4}{y+10} = \frac{x}{16} = \frac{10}{20}$$

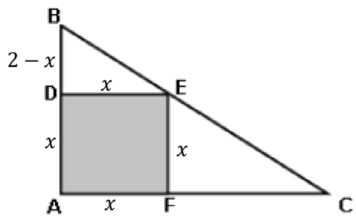
Se tiver dúvida em como montar a proporção, marque com símbolos diferentes os pares de ângulos iguais. Além disso, veja que $\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$. Assim :

$$\frac{x}{16} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = 16 \Rightarrow x = 8$$

$$\frac{10,4}{y+10} = \frac{1}{2} \Rightarrow y + 10 = 20,8 \Rightarrow y = 10,8$$

E vemos que : $z + 10,4 = 20 \Rightarrow z = 9,6$. Logo, o perímetro do quadrilátero pedido será : $x + y + z + 16 = 8 + 10,8 + 9,6 + 16 = 44,4\ cm$.
Resposta : O perímetro de $BCED$ é $44,4\ cm$.

Exemplo 6 : Na figura, o triângulo ABC é retângulo em A, $ADEF$ é um quadrado, $AB = 2cm$ e $AC = 6cm$. Quanto mede o lado do quadrado?



Disponível em : http://www.educacional.com.br/upload/blogSite/8227/8227321/26265/Lista%20052232012215421.pdf

Resolução : Se $ADEF$ é quadrado, então $\overleftrightarrow{AC} // \overleftrightarrow{DE}$. Logo, $B\widehat{D}E = B\hat{A}C = 90^o$ (ângulos correspondentes) e $B\hat{E}D = B\hat{C}A$ (ângulos correspondentes). Podemos concluir, pelo caso AA, que $\Delta BDE \sim \Delta BAC$. Da semelhança, temos :

$$\frac{2-x}{2}=\frac{x}{6}\Rightarrow 2x=6(2-x)\Rightarrow 2x=12-6x\Rightarrow 8x=12\Rightarrow x=\frac{12}{8}=1{,}5\ cm$$

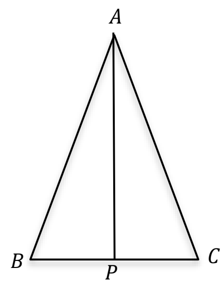
Resposta : O lado do quadrado mede 1,5 cm.

A seguir são apresentadas mais duas propriedades importantes, consequência da semelhança (na verdade, da congruência).

Propriedade 3 : Um triângulo é isósceles se, e somente se, os ângulos da base são iguais.

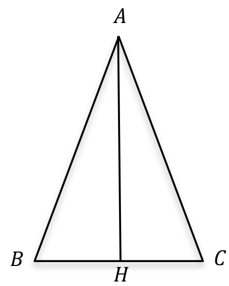
Demonstração

($\Rightarrow$) : Consideremos um triângulo isósceles ABC e tracemos a bissetriz do ângulo $\hat{A}$:



Temos que : $\frac{AB}{AC}=1$ (o triângulo é isósceles), $\frac{AP}{AP}=1$ (lado comum aos triângulos $ABP\ e\ ACP$). Logo : $\frac{AB}{AC}=\frac{AP}{AP}$. Além disso, temos que $B\hat{A}P=C\hat{A}P$ (AP é bissetriz). Então, pelo caso LAL, os triângulos $ABP\ e\ ACP$ são semelhantes (na verdade, são CONGRUENTES, pois $k=1$). Disso, concluímos que os ângulos opostos ao lado AP, em cada triângulo, são iguais, ou seja, $\hat{B}=\hat{C}$.

($\Leftarrow$) : Consideremos um triângulo ABC em que $\hat{B}=\hat{C}$. Tracemos a altura AH deste triângulo, ou seja, $A\hat{H}B=A\hat{H}C=90^o$:



Pelo caso AA, concluímos que os triângulos $ABH\ e\ ACH$ são semelhantes. Em triângulos semelhantes, sabemos que lados opostos a ângulos iguais formam proporção. Então : $\frac{AB}{AC}=\frac{AH}{AH}=1$ (na verdade, os triângulos são congruentes). Desse modo, concluímos que $\overline{AB}=\overline{AC}$, ou seja, o triângulo é isósceles.

Observação : Esta terceira propriedade nos permite concluir que também que :

a) Num triângulo equilátero, os três ângulos internos são iguais e medem 60^o cada. De fato, se ΔABC é equilátero, então $\overline{AB} = \overline{AC}$. Desse modo, podemos considerar que o triângulo é isósceles de base BC e, assim, $\hat{B} = \hat{C}$. Por outro lado, se o triângulo é equilátero, temos também que $\overline{BA} = \overline{BC}$. Isso nos mostra que também podemos ver este triângulo como isósceles de base AC. Logo, $\hat{A} = \hat{C}$. Juntando as igualdades, temos que $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$. Como a soma dos três ângulos é 180^o, então cada um deles vale 60^o.
b) Utilizando também a terceira propriedade, podemos concluir que, se um triângulo possui os três ângulos internos iguais a 60^o, então ele é equilátero (escreva este raciocínio).

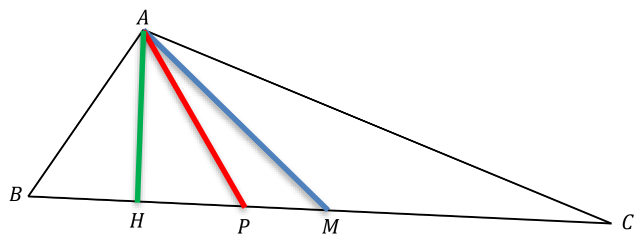
Podemos, então, enunciar o corolário a seguir, que decorre imediatamente da propriedade 3 :

Um triângulo é equilátero se, e somente se, é equiângulo.

Para enunciar a próxima propriedade, precisamos definir três segmentos notáveis de um triângulo :

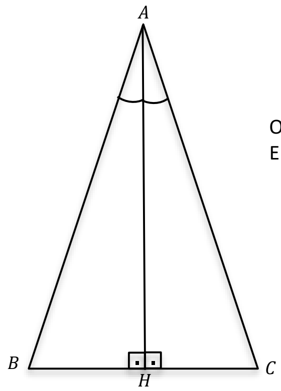
a) **Mediana** : Segmento que sai de um dos vértices de um triângulo e vai até o ponto médio do lado oposto a esse vértice. Todo triângulo possui três medianas.
b) **Bissetriz** : Segmento que sai de um vértice e vai até o lado oposto, dividindo o ângulo do vértice de origem ao meio. Todo triângulo possui três bissetrizes.
c) **Altura** : Segmento que sai de um vértice e vai até a reta suporte do lado oposto a este vértice, sendo perpendicular a esta reta. Todo triângulo possui três alturas.

Vejamos a figura a seguir :



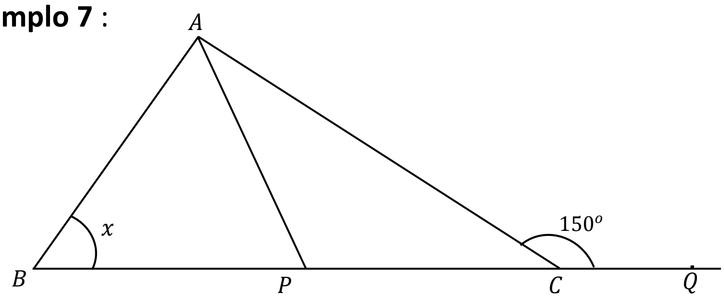
Aqui, temos que AM é uma mediana deste triângulo ($\overline{AM} = \overline{CM}$). O segmento AP é uma bissetriz ($B\hat{A}P = C\hat{A}P$). Já o segmento AH é uma altura ($A\widehat{H}B = A\widehat{H}C = 90^o$). Veja que, em geral, os três segmentos, relativos a um mesmo vértice, não coincidem. A propriedade seguinte nos diz que, num triângulo isósceles, se tomarmos a mediana, a bissetriz e a altura que têm uma das extremidades na base do triângulo, elas coincidem! Não será demonstrado, mas pode ser feita a prova como exercício.

Propriedade 4 : Num triângulo isósceles, a mediana, a bissetriz e a altura **relativas à base** coincidem!



O triângulo ABC é isósceles, com $\overline{AB} = \overline{AC}$.
Então, AH é mediana, bissetriz e altura!

Exemplo 7 :



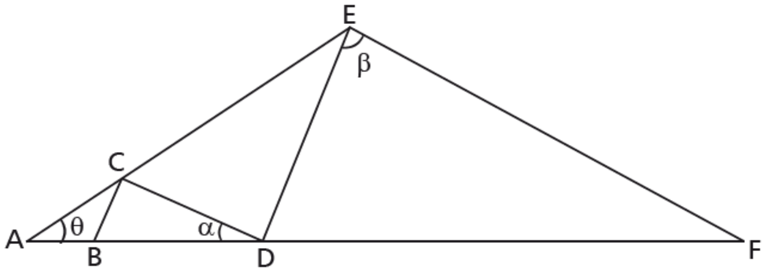
Na figura acima, $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$ e o ângulo $A\hat{C}Q = 150^o$. Determine a medida do ângulo $A\hat{B}C = x$.

Resolução : $A\hat{C}P + 150^o = 180^o \Rightarrow A\hat{C}P = 30^o$. Como $\overline{PA} = \overline{PC}$, temos que o ΔPAC é isósceles e, portanto : $P\hat{A}C = A\hat{C}P = 30^o$. Utilizando o fato de que a soma dos ângulos internos de um triângulo vale 180^o temos, olhando para o ΔPAC : $A\hat{P}C + 30^o + 30^o = 180^0 \Rightarrow A\hat{P}C = 120^o$. Os ângulos $A\hat{P}C \text{ e } A\hat{P}B$ são suplementares. Logo : $A\hat{P}B + 120^o = 180^o \Rightarrow A\hat{P}B = 60^o$. Mas $P\hat{A}B = x$, pois $\overline{PA} = \overline{PB}$, e o triângulo PAB é isósceles de base AB. Assim : $x + x + 60^o = 180^o \Rightarrow 2x = 120^o \Rightarrow x = 60^o$. Isso nos mostra que, na verdade, o triângulo PAB é equilátero, ou seja, $\overline{AB} = \overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$!

Resposta : $x = 60^o$.

Exercícios Propostos

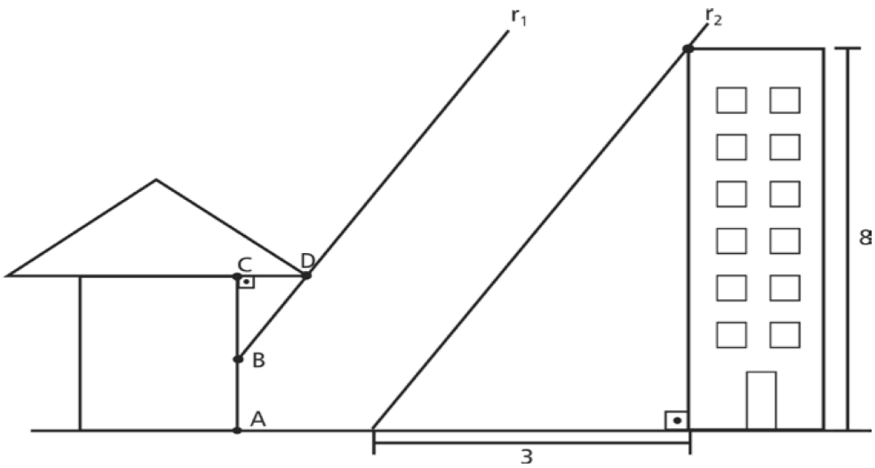
1) (CEFET/MG – 2018) No triângulo AEF da figura a seguir, temos que $med(\overline{AB}) = med(\overline{BC})$, $\overline{BC}//\overline{DE}$ e $\overline{CD}//\overline{EF}$:



O valor de θ, escrito em função de $\alpha\ e\ \beta$ é :

a) $\theta = \alpha + \beta$
b) $\theta = \beta - \alpha$
c) $\theta = \frac{180^o + \alpha + \beta}{2}$
d) $\theta = \frac{180^o - \alpha - \beta}{2}$

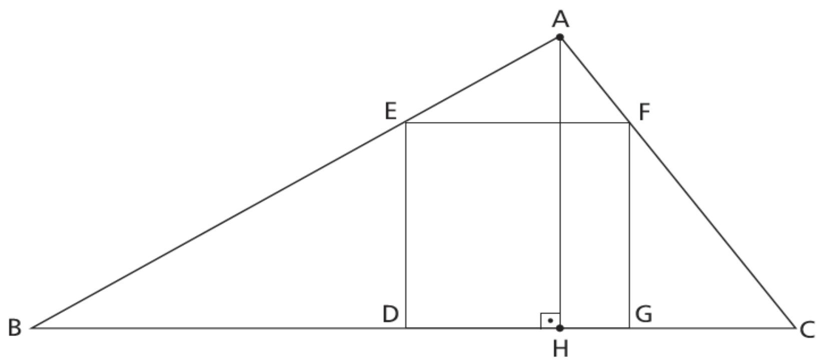
2) (CEFET/MG – 2016) Na figura a seguir, o segmento $\overline{AC}$ representa uma parede cuja altura é 2,9m. A medida do segmento $\overline{AB}$ é 1,3m e o segmento $\overline{CD}$ representa o beiral da casa. Os raios de sol $r_1\ e\ r_2$ passam ao mesmo tempo pela casa e pelo prédio, respectivamente.



Se r_1 é paralelo com r_2, então o comprimento do beiral, em metros, é :

a) 0,60
b) 0,65
c) 0,70
d) 0,75

3) (CEFET/MG – 2014) A figura a seguir apresenta um quadrado DEFG e um triângulo ABC cujo lado BC mede 40cm e a altura AH, 24cm. A medida do lado desse quadrado é um número :

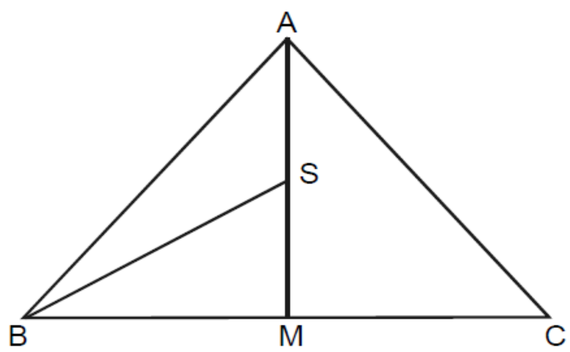


a) Par
b) Primo
c) Divisível por 4
d) Múltiplo de 5

Dica (não está na questão) : Quando dois polígonos são semelhantes, a razão entre quaisquer dois elementos lineares correspondentes é igual à razão de semelhança. Por exemplo, a razão entre as alturas também é igual à razão de semelhança.

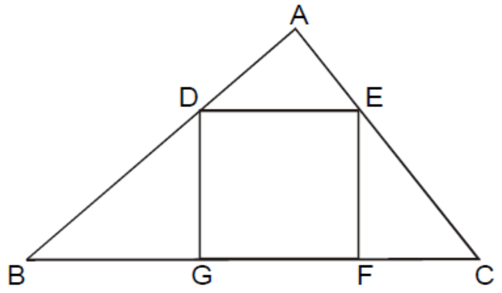
4) (CEFET/MG – 2011) Referindo-se às afirmações seguintes, assinale (V) para as verdadeiras e (F) para as falsas.
( ) Dois triângulos semelhantes são sempre congruentes.
( ) Dois triângulos equiláteros são sempre semelhantes.
( ) Dois triângulos retângulos são sempre semelhantes.
( ) Dois triângulos retângulos isósceles são sempre congruentes.
A sequência correta encontrada é :
a) V V V F
b) F V F F
c) F V F V
d) F F F V

5) (CEFET/MG – 2006 – Adapt) Na figura, $\hat{A} = 90^o$, $\overline{AM} = \overline{BM}$, BS é bissetriz do ângulo $\hat{B}$ e $A\hat{S}B = 126^o$. Nessas condições, o ângulo $\hat{C}$ mede :



a) 30^o
b) 36^o
c) 44^o
d) 54^o

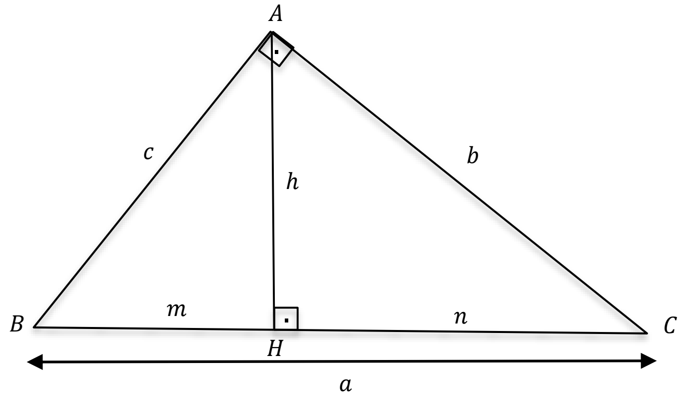
6) (CEFET/MG – 2005) Na figura, ABC é um triângulo retângulo em A e DEFG é um quadrado inscrito nesse triângulo. Considerando-se que BG=9 e CF=4, o perímetro desse quadrado é igual a :



a) 24
b) 28
c) 32
d) 36

6.4. Relações Métricas no Triângulo Retângulo e Teorema da Bissetriz Interna e Externa

Consideremos um triângulo retângulo ABC, retângulo em $\hat{A}$, e sua altura AH relativa à hipotenusa. Neste triângulo, a é a medida da hipotenusa, b e c são as medidas dos catetos (b oposto ao ângulo $\hat{B}$ e c oposto ao ângulo $\hat{C}$), h é a medida da altura. Já m e n são as medidas das duas partes em que a altura divide a hipotenusa :



Vemos que os triângulos ABC e HBA são semelhantes (caso AA) : ambos são retângulos e possuem o ângulo $\hat{B}$ em comum. Os triângulos ABC e HAC também são semelhantes pelo mesmo caso : ambos retângulos e ângulo $\hat{C}$ em comum. Pela propriedade da transitividade da semelhança, podemos dizer que os três triângulos são semelhantes entre si : $\Delta ABC \sim \Delta HBA \sim \Delta HAC$.

Da semelhança de ABC e HBA, podemos escrever :

$$\frac{c}{a} = \frac{h}{b} \Rightarrow ah = bc\ (I)$$

$$\frac{m}{c} = \frac{c}{a} \Rightarrow c^2 = am\ (II)$$

Da semelhança de ABC e HAC, podemos escrever :

$$\frac{n}{b}=\frac{b}{a}\Rightarrow b^2=an\ (III)$$

Da semelhança de HBA e HAC, podemos escrever :

$$\frac{h}{n}=\frac{m}{h}\Rightarrow h^2=mn\ (IV)$$

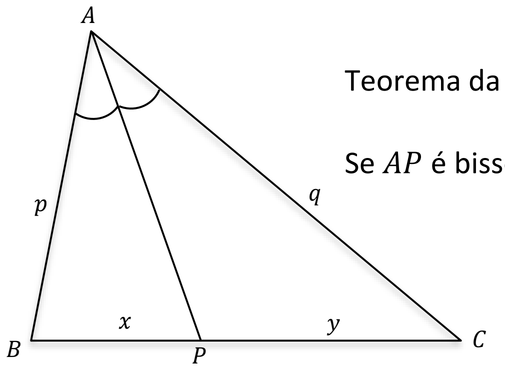
Já adicionando-se as relações $II\ e\ III$, obtemos uma quinta relação :

$$c^2+b^2=am+an=a(m+n)$$

Como $m+n=a : a.a=b^2+c^2$ ou $a^2=b^2+c^2\ (V)$
Esta última relação é um resultado importante conhecido como TEOREMA DE PITÁGORAS.

Portanto, são cinco as relações métricas importantes em um triângulo retângulo : $b^2=an,\ c^2=an,\ h^2=mn,\ ah=bc\ e\ a^2=b^2+c^2$.

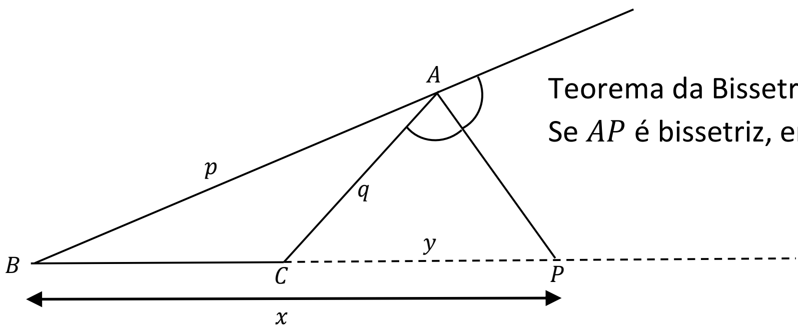
O Teorema da Bissetriz Interna é uma ferramenta interessante e que pode ajudar resolver problemas de triângulos. Não será demonstrado aqui. Diz que **a bissetriz interna a um dos ângulos de um triângulo divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos lados adjacentes.** Em figura :



Teorema da Bissetriz Interna

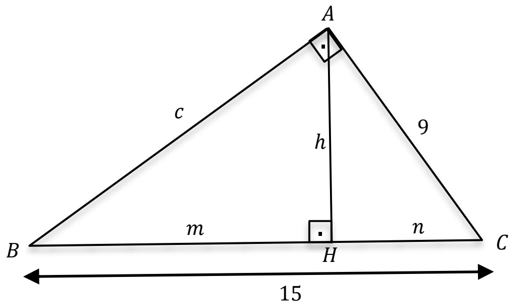
Se AP é bissetriz, então $\frac{x}{p}=\frac{y}{q}$.

Temos também o Teorema da Bissetriz externa :



Teorema da Bissetriz Externa
Se AP é bissetriz, então $\frac{x}{p}=\frac{y}{q}$.

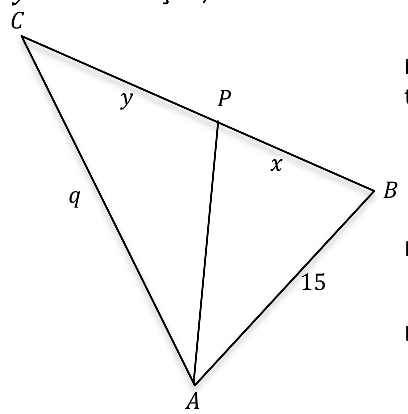
Exemplo 8 : Na figura a seguir, calcule as medidas dos elementos desconhecidos :



Resolução : Utilizando as relações estudadas, temos :

$$15^2 = 9^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = 225 - 81 = 144 \Rightarrow c = 12$$
$$9^2 = 15n \Rightarrow 15n = 81 \Rightarrow n = 5{,}4$$
$$12^2 = 15m \Rightarrow 15m = 144 \Rightarrow m = 9{,}6$$
$$15h = 9 \times 12 \Rightarrow 15h = 108 \Rightarrow h = 7{,}2$$

Exemplo 9 : Se AP é bissetriz de um dos ângulos internos do triângulo, e se a razão de x para y é dois terços, calcule o valor de q.



Resolução : Pelo Teorema da Bissetriz Interna, temos que :

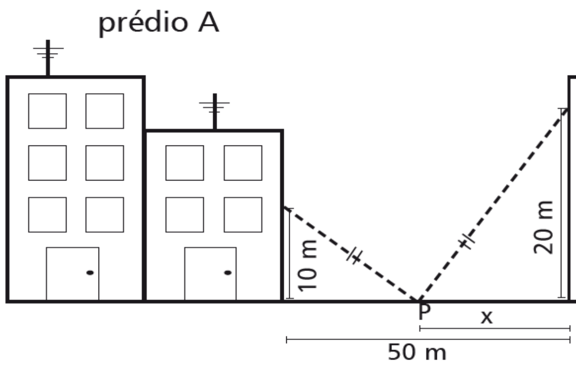
$$\frac{x}{15} = \frac{y}{q} \Rightarrow q = \frac{15y}{x}$$

Mas sabemos que : $\frac{x}{y} = \frac{2}{3} \Rightarrow 2y = 3x \Rightarrow y = \frac{3x}{2}$

Então : $q = \frac{15 \times \frac{3x}{2}}{x} = 15 \times \frac{3}{2} = \frac{45}{2} = 22{,}5$

Exercícios Propostos

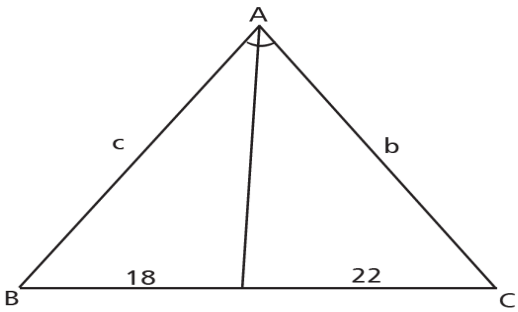
7) (CEFET/MG – 2017) Duas crianças, cada uma em um prédio diferente, brincam com canetas lasers nas janelas de seus apartamentos, apontando para um ponto na quadra situada entre os prédios. A criança do prédio A está a uma altura de 10 m, e a do prédio B, a uma altura de 20 m do chão. A distância entre os prédios é de 50 m. Em um determinado momento, os lasers das crianças atingem, simultaneamente, um ponto P do pátio equidistante das crianças, tal como na ilustração a seguir :



A distância x, em metros, deste ponto até o prédio B é :

a) 22
b) 23
c) 25
d) 28

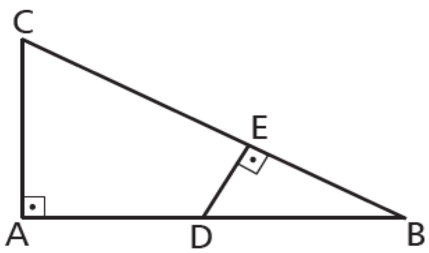
8) (CEFET/MG – 2015) O perímetro do triângulo ABC vale 120 cm e a bissetriz do ângulo Â divide o lado oposto em dois segmentos de 18 e 22 cm, conforme a figura :



A medida do maior lado desse triângulo, em cm, é :

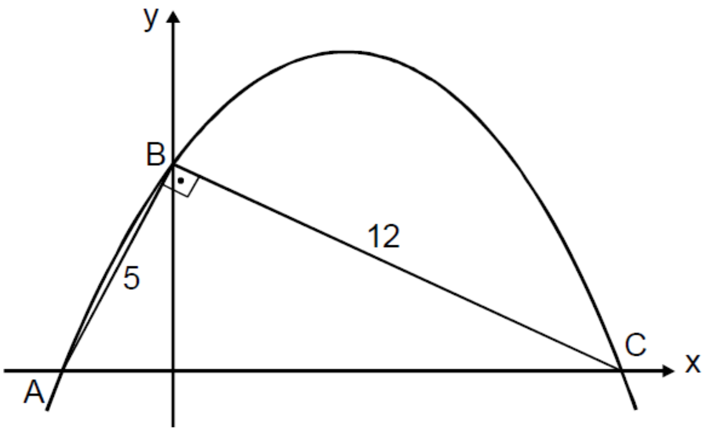
a) 22
b) 36
c) 44
d) 52

9) (CEFET/MG – 2015) Na figura, os triângulos $ABC\ e\ BDE$ são triângulos retângulos, onde $\overline{AC} = 2, \overline{AB} = 2\sqrt{3}\ e\ \overline{AD} = 2\overline{DE}$. Desenhando o triângulo ACD, a medida do segmento CD é igual a :



a) $\sqrt{2}$
b) $\sqrt{3}$
c) $\sqrt{5}$
d) $\sqrt{7}$

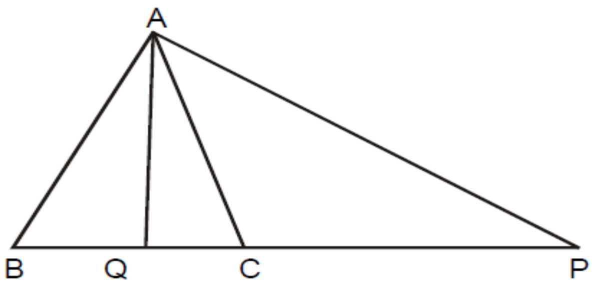
10) (CEFET/MG – 2010) Na figura seguinte, as raízes da equação da parábola expressa por $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, com $a \in \mathbb{R}^*$, são $x_1\ e\ x_2$:



Os valores de $a, x_1\ e\ x_2$ são, respectivamente :

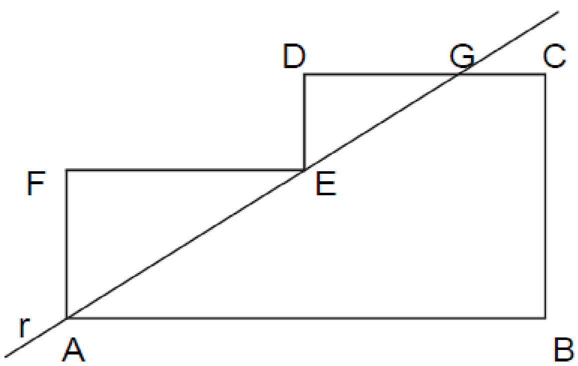
a) $-\frac{13}{60}, -\frac{25}{13}, \frac{144}{13}$
b) $-\frac{1}{60}, -\frac{25}{13}, \frac{144}{13}$
c) $\frac{13}{60}, \frac{25}{13}, \frac{144}{13}$
d) $\frac{1}{60}, \frac{25}{13}, \frac{144}{13}$

11) (CEFET/MG – 2007) Na figura, AQ e AP são, respectivamente, bissetrizes interna e externa do triângulo ABC. Se BQ = 8 m e QC = 6 m, então a medida de QP, em metros, é :



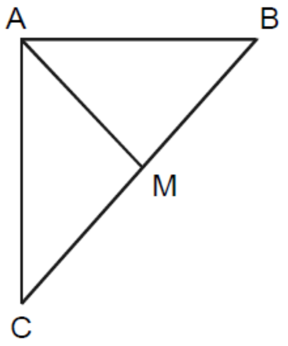
a) 32
b) 36
c) 42
d) 48

12) (CEFET/MG – 2006) A figura mostra o polígono ABCDEF, no qual dois lados consecutivos quaisquer são perpendiculares. O ponto G está sobre o lado CD e a reta r. As medidas dos lados AB, BC, EF e FA são, respectivamente, 16cm, 12cm, 6cm e 8 cm. O perímetro do polígono ABCG, em cm, é :



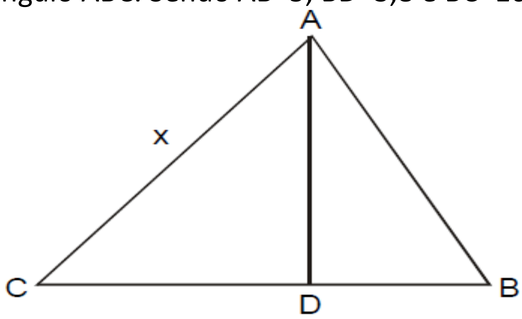
a) 46
b) 48
c) 50
d) 52

13) (CEFET/MG – 2006) Na figura, o triângulo ABC é retângulo em Â e AM é bissetriz do ângulo Â. Se $AC = 3$ e $AM = \sqrt{2}$, então a medida da hipotenusa BC é :



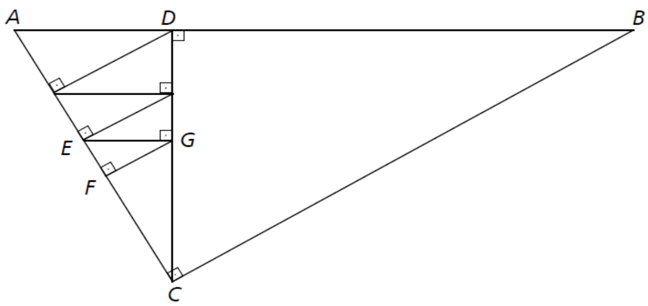
a) $3\sqrt{2}$
b) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$
c) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$
d) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$

14) (CEFET/MG – 2005) Na figura, AD é a distância do vértice A ao lado BC do triângulo ABC. Sendo AB=5, BD=3,8 e BC=10, a medida x do lado AC é :



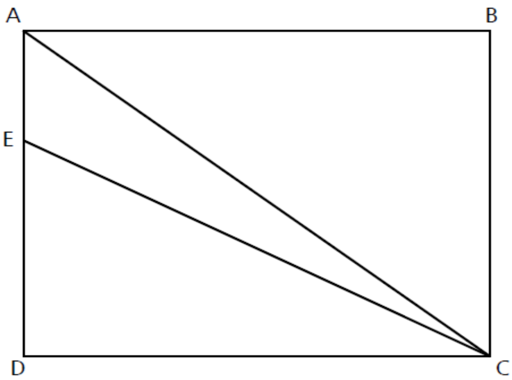
a) 7
b) 8
c) 9
d) 10

15) (CEFET/MG – 2019) Na figura abaixo, o triângulo ABC é retângulo em C. Sendo $med(\overline{AD}) = 4cm, med(\overline{BD}) = 8cm\ e\ med(\overline{EF}) = 0,2cm$, a medida de $\overline{EG}$, em cm, é :



a) $0,2\sqrt{3}$
b) $0,3\sqrt{3}$
c) $0,4\sqrt{3}$
d) $0,5\sqrt{3}$

16) (CEFET/MG – 2019) No retângulo $ABCD$, o lado $\overline{AB}$ mede $4b$ e o lado $\overline{BC}$ mede $3b$. Sabendo-se que a medida do segmento $\overline{AE}$ é $\frac{1}{3}$ da medida de $\overline{AD}$, então o perímetro do triângulo ACE é :



a) $16b$
b) $46b$
c) $b(5+4\sqrt{5})$
d) $b(6+2\sqrt{5})$

6.5. Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo

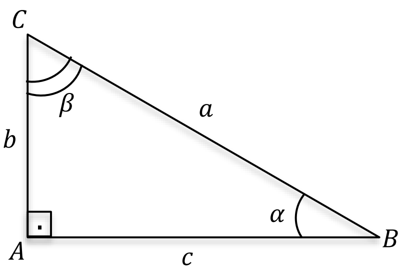
Em um triângulo retângulo, podemos definir três razões importantes referentes a cada um de seus dois ângulos agudos. Essas razões dependem apenas do ângulo em questão, ou seja, não dependem do triângulo retângulo do qual o ângulo faz parte (são tabeladas). Isso ocorre porque, se dois triângulos retângulos têm um mesmo ângulo agudo, eles são semelhantes. Logo as razões a seguir serão iguais nos dois. Elas são as RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS. São elas :

$$seno\ de\ um\ \hat{a}ngulo\ agudo = \frac{cateto\ oposto\ ao\ \hat{a}ngulo}{hipotenusa}$$

$$cosseno\ de\ um\ \hat{a}ngulo\ agudo = \frac{cateto\ adjacente\ ao\ \hat{a}ngulo}{hipotenusa}$$

$$tangente\ de\ um\ \hat{a}ngulo\ agudo = \frac{cateto\ oposto\ ao\ \hat{a}ngulo}{cateto\ adjacente\ ao\ \hat{a}ngulo}$$

No triângulo retângulo ABC a seguir, seja a a medida da hipotenusa, $b\ e\ c$ as medidas dos catetos e $\alpha\ e\ \beta$ as medidas de seus dois ângulos agudos.



De acordo com as definições dadas, podemos escrever :

$$sen\ \alpha = \frac{b}{a} \qquad \cos\alpha = \frac{c}{a} \qquad tg\ \alpha = \frac{b}{c}$$

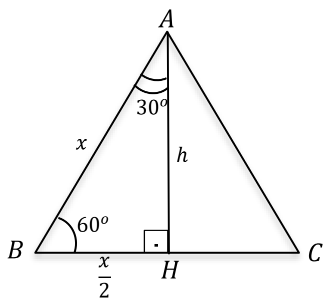
$$sen\ \beta = \frac{c}{a} \qquad \cos\beta = \frac{b}{a} \qquad tg\ \beta = \frac{c}{b}$$

Observando que $\alpha + \beta = 90^o$, ou seja, $\beta = 90^o - \alpha$, já podemos perceber aqui algumas relações interessantes da trigonometria :

$$sen\ \alpha = \cos(90^o - \alpha)\,, \cos\alpha = sen\ (90^o - \alpha)\ e\ tg\ \alpha = \frac{1}{tg\ (90^o - \alpha)}$$

Podemos ver também que : $tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{\cos\alpha}$.

Alguns ângulos são notáveis. Por exemplo, ao traçar uma das alturas de um triângulo equilátero, sabemos que ela é, também, mediana e bissetriz. Consideremos, então, um triângulo equilátero de lado x :



Aplicando – se o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo AHB :

$$h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = x^2 \Rightarrow h^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3x^2}{4} \Rightarrow h = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

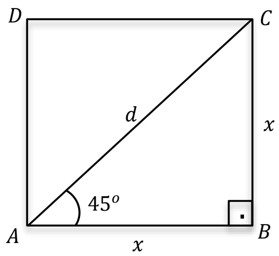
Logo, do triângulo equilátero, podemos "tirar" as razões trigonométricas de dois ângulos importantes. Olhando de novo para o triângulo retângulo AHB, temos :

$$sen\ 60^o = \frac{h}{x} = \frac{x\sqrt{3}/2}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 60^o = \frac{x/2}{x} = \frac{1}{2}\ e\ tg\ 60^o = \frac{x\sqrt{3}/2}{x/2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3}$$

Pelas relações escritas :

$$sen\ 30^o = \cos 60^o = \frac{1}{2}, \cos 30^o = sen\ 60^o = \frac{\sqrt{3}}{2}\ e\ tg\ 30^o = \frac{1}{tg\ 60^o} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Olhando para um quadrado e sua diagonal, podemos encontrar as razões trigonométricas de um outro ângulo notável. Consideremos um quadrado de lado x :



Utilizando o Teorema de Pitágoras, podemos calcular o valor de sua diagonal em função de seu lado :

$$d^2 = x^2 + x^2 \Rightarrow d^2 = 2x^2 \Rightarrow d = x\sqrt{2}$$

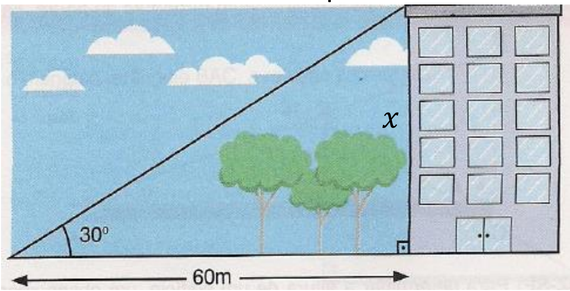
Logo, do quadrado podemos "tirar" as razões trigonométricas do ângulo de 45^o (olhe para o triângulo retângulo ABC) :

$$sen\ 45^o = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}\ e\ tg\ 45^o = \frac{x}{x} = 1$$

Os resultados podem ser resumidos na tabela a seguir. Ela é de suma importância em nossos problemas (vale a pena memorizar) :

	30^o	45^o	60^o
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Exemplo 10 : Calcule a altura do prédio mostrado :



Disponível em :
http://www.csj.g12.br/csj_www2/ef69/2016/salaestudo/3tri/Mat_9ano_3tri_Exercicios_Marcelo.pdf

Resolução : Neste tipo de exercício é preciso, primeiramente, decidir qual das três razões trigonométricas iremos utilizar. Isso depende dos dados que foram fornecidos. Observe o triângulo retângulo com ângulo agudo de 30^o. A altura do prédio, que queremos calcular, é o cateto oposto a este ângulo. Já a distância de 60m é a medida do cateto adjacente ao ângulo. Das razões estudadas, o que relaciona ângulo com cateto oposto e cateto adjacente? É a TANGENTE! Então, podemos escrever :

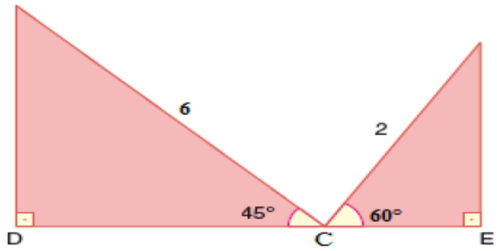
$$tg\ 30^o = \frac{x}{60}$$

Na tabela que formamos, temos que $tg\ 30^o = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Substituindo, temos :

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{60} \Rightarrow 3x = 60\sqrt{3} \Rightarrow x = 20\sqrt{3}\,metros$$

Resposta : O edifício tem altura de $20\sqrt{3}m$ (aproximadamente 34,6m).

Exemplo 11 : Na figura, calcule a distância entre D e E :



Disponível em : http://files.cintiamarques.webnode.com.br/200000133-c9158cb096/Trigonometria.pdf

Resolução : Para calcular a distância $\overline{DC}$, aplicamos o conceito de cosseno no primeiro triângulo retângulo :

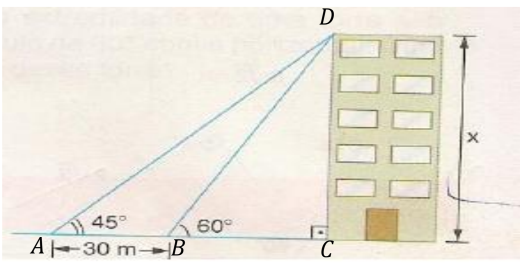
$$\cos 45^o = \frac{\overline{DC}}{6} \Rightarrow \overline{DC} = 6 \cos 45^o = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

Para calcular $\overline{CE}$, olhamos para o outro triângulo retângulo :

$$\cos 60^o = \frac{\overline{CE}}{2} \Rightarrow \overline{CE} = 2 \cos 60^o = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

Logo : $\overline{DE} = \overline{DC} + \overline{CE} = 3\sqrt{2} + 1$

Exemplo 12 : Um observador vê um edifício, construído em terreno plano, sob um ângulo de 60^o. Se ele se afastar do edifício mais 30 m, passará a vê-lo sob um ângulo de 45^o. Calcule a altura do edifício.



Disponível em : http://www.csj.g12.br/csj_www2/ef69/2016/salaestudo/3tri/Mat_9ano_3tri_Exercicios_Marcelo.pdf

Resolução : Chamemos a distância do vértice do ângulo de 45^o até a base do edifício de p. Olhando para o maior triângulo retângulo da figura (ΔACD), podemos escrever :

$$tg\ 45^o = \frac{x}{p} \Rightarrow 1 = \frac{x}{p} \Rightarrow p = x$$

Ou seja, a distância do vértice do ângulo de 45^o à base do prédio é igual à altura dele. Logo, temos que a distância do vértice do ângulo de 60^o à base do prédio é igual a $(x - 30)$m. Olhando para o menor triângulo retângulo da figura (ΔBCD), temos :

$$tg\ 60^o = \frac{x}{x-30} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{x}{x-30} \Rightarrow \sqrt{3}x - 30\sqrt{3} = x \Rightarrow \sqrt{3}x - x = 30\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\sqrt{3}-1)x = 30\sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{30\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \frac{30\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{90+30\sqrt{3}}{3-1}$$

$$= \frac{90+30\sqrt{3}}{2} = (45+15\sqrt{3})\ metros$$

Exercícios Propostos

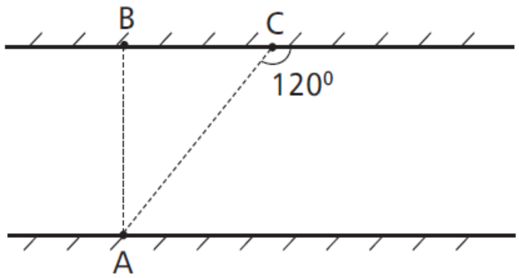
17) (CEFET/MG – 2017) Em um triângulo retângulo, a tangente de um de seus ângulos agudos é 2. Sabendo-se que a hipotenusa desse triângulo é 5, o valor do seno desse mesmo ângulo é :

a) $\frac{4}{5}$
b) $\frac{\sqrt{5}}{4}$
c) $\frac{\sqrt{5}}{5}$
d) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

18) (CEFET/MG – 2013) O percurso reto de um rio, cuja correnteza aponta para a direita, encontra-se representado pela figura abaixo. Um nadador deseja determinar a largura do rio nesse trecho e propõe-se a nadar do ponto A ao B, conduzindo uma corda, a qual tem uma de suas extremidades retidas no ponto A. Um observador localizado em A verifica que o nadador levou a corda até o ponto C.

Dados:

α	30^0	45^0	60^0
sen α	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
cos α	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$
tg α	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$



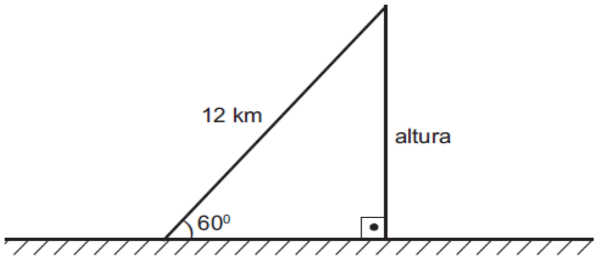
Nessas condições, a largura do rio, no trecho considerado, é expressa por :

a) $\frac{1}{3}\overline{AC}$
b) $\frac{1}{2}\overline{AC}$
c) $\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AC}$
d) $\frac{3\sqrt{3}}{3}\overline{AC}$

19) (CEFET/MG – 2012) Um triângulo ABC, retângulo em $\hat{A}$, possui o ângulo interno $\hat{C}$ maior que o ângulo interno $\hat{B}$. De acordo com esses dados, é correto afirmar que :

a) $sen\,\hat{B} < \cos \hat{C}$
b) $sen\,\hat{B} < \cos \hat{B}$
c) $sen\,\hat{C} < \cos \hat{C}$
d) $sen\,\hat{C} < \cos \hat{B}$

20) (CEFET/MG – 2011) Um foguete é lançado de uma rampa situada no solo sob um ângulo de 60^o, conforme a figura :



Dados:

$sen\ 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\ 60^0 = \frac{1}{2}$

$tg\ 60^0 = \sqrt{3}$

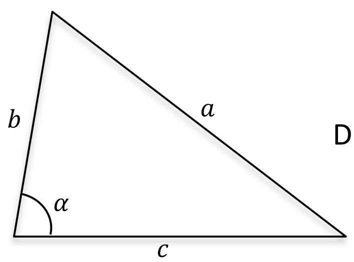
A altura em que se encontra o foguete, após ter percorrido 12 km é :
a) $600\ dam$
b) $12.000\ m$
c) $6.000\sqrt{3}\ dm$
d) $600.000\sqrt{3}\ cm$

21) (CEFET/MG – 2005) As extremidades de um fio de antena totalmente esticado estão presas no topo de um prédio e no topo de um poste, respectivamente, de 16 e 4 metros de altura. Considerando-se o terreno horizontal e sabendo-se que a distância entre o prédio e o poste é de 9 metros, o comprimento do fio, em metros, é :
a) 12
b) 15
c) 20
d) 25

6.6. Lei dos Cossenos

Este é um teorema muito interessante, que pode ser útil e ajudar na resolução de problemas sobre triângulos. É uma espécie de “generalização” do Teorema de Pitágoras para triângulos não retângulos. Na verdade, podemos ver o Teorema de Pitágoras como um “caso particular” da Lei dos Cossenos.

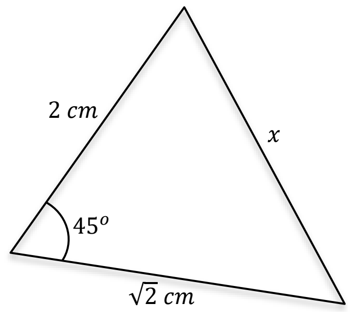
Ela nos diz que : “Em qualquer triângulo, o quadrado de um dos lados é igual à soma dos quadrados dos outros dois, menos o duplo produto desses dois vezes o cosseno do ângulo que eles formam.” Em figura :



Lei dos Cossenos
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\alpha$$

Dica : Comece a “sentença” sempre pelo lado oposto ao ângulo dado!

Exemplo 13 : Na figura, calcule x :



Resolução : Aplicando a Lei dos Cossenos, temos :

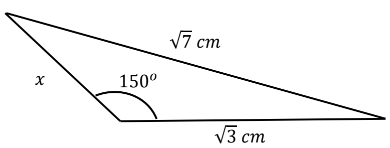
$$x^2 = 2^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 - 2 \times 2 \times \sqrt{2} \times \cos 45^o$$

$$x^2 = 4 + 2 - 4\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x^2 = 6 - 4 \Rightarrow x = \sqrt{2}\,cm$$

Às vezes, acontece de ser dado um ângulo obtuso do triângulo. Ainda não foi estudada a trigonometria no ciclo trigonométrico (assunto do ensino médio). Mas, se tivermos um ângulo α tal que $90^o < \alpha < 180^o$, podemos utilizar a seguinte relação trigonométrica para obter o seu cosseno : $\cos\alpha = -\cos(180^o - \alpha)$.

Exemplo 14 : Calcule, no triângulo a seguir, a medida desconhecida x :



Resolução : Primeiramente, é preciso ver que, se $\alpha = 150^o$:

$$\cos 150^o = -\cos(180^o - 150^o) = -\cos 30^o = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Aplicando-se a Lei dos Cossenos :

$$(\sqrt{7})^2 = x^2 + (\sqrt{3})^2 - 2.x.\sqrt{3}.\cos 150^o$$

$$7 = x^2 + 3 - 2\sqrt{3}x.\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$\Delta = 3^2 - 4.1.(-4) = 25$$

$$x = \frac{-3 \pm 5}{2}$$

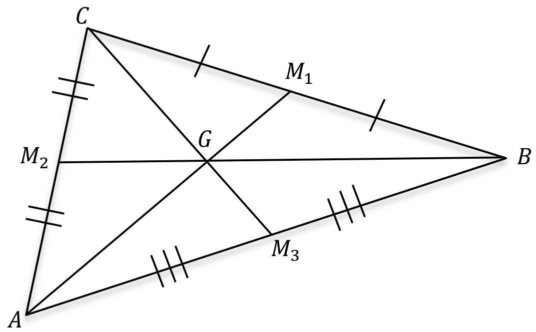
$$x_1 = 1\ e\ x_2 = -4\ (não\ serve!)$$

Resposta : $x = 1\ cm$.

6.7. Segmentos e Pontos Notáveis do Triângulo

Todos os triângulos possuem os seguintes segmentos e pontos notáveis :

Mediana : Um segmento que tem origem em um dos vértices e extremidade no ponto médio do lado oposto é chamado de uma MEDIANA do triângulo. Todo triângulo possui três medianas, que se encontram em um ponto chamado de BARICENTRO do triângulo.



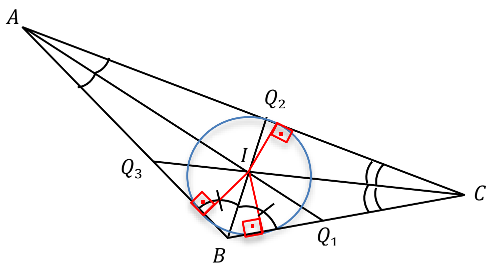
O Baricentro (G) possui as seguintes propriedades :

É sempre interno ao triângulo.

Se o triângulo tiver densidade constante em toda a sua extensão, o baricentro é o CENTRO DE GRAVIDADE dele.

O baricentro divide cada mediana na razão 2:1. Na figura acima, por exemplo, temos que : $\overline{AG} = 2\overline{GM_1}, \overline{BG} = 2\overline{GM_2}\ e\ \overline{CG} = 2\overline{GM_3}$.

Bissetriz : Segmento que tem origem em um dos vértices do triângulo e extremidade no lado oposto, sendo que divide o ângulo do vértice de origem ao meio. Todo triângulo possui três bissetrizes. O ponto de encontro das três bissetrizes é o INCENTRO do triângulo.

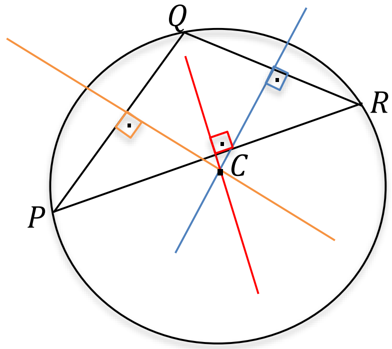


O incentro (I) tem as seguintes propriedades :

É sempre interno ao triângulo.

A bissetriz de um ângulo é o lugar geométrico dos pontos que são equidistantes das duas semirretas que formam o ângulo. Como o incentro é comum às três bissetrizes, ele tem a propriedade de ser equidistante dos três lados do triângulo (como nos mostram as distâncias em vermelho marcadas na figura). Desse modo, temos que é SEMPRE possível traçar uma circunferência que tangencie os três lados de um triângulo. Basta tomar o incentro como centro desta circunferência e a distância dele a qualquer um dos lados do triângulo como raio. Dizemos que a circunferência assim obtida está inscrita no triângulo ou, equivalentemente, que o triângulo está CIRCUNSCRITO à circunferência. Então, podemos enunciar o importante resultado : TODO TRIÂNGULO É CIRCUNSCRITÍVEL (ADMITE CIRCUNFERÊNCIA INSCRITA). O CENTRO DESTA CIRCUNFERÊNCIA É O INCENTRO DO TRIÂNGULO!

Mediatriz : Reta que passa pelo ponto médio de um dos lados de um triângulo e é PERPENDICULAR a esse lado. Todo triângulo possui três mediatrizes. O ponto onde elas se encontram é o CIRCUNCENTRO do triângulo.

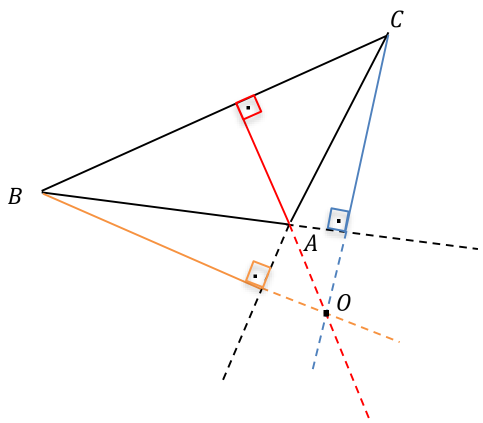


O circuncentro (C) tem as seguintes propriedades :

Nem sempre é interno ao triângulo (como vemos no exemplo acima). Na verdade, o circuncentro será interno quando o triângulo for acutângulo e externo quando for obtusângulo. Se o triângulo for retângulo, o circuncentro será o ponto médio da hipotenusa.

A mediatriz de um segmento é o lugar geométrico dos pontos que são equidistantes das duas extremidades do segmento. Como o circuncentro é comum às três mediatrizes, ele tem a propriedade de ser equidistante dos três vértices do triângulo. Desse modo, temos que é SEMPRE possível traçar uma circunferência que passe pelos três vértices de um triângulo. Basta tomar o circuncentro como centro desta circunferência e a distância dele a qualquer um dos vértices do triângulo como raio. Dizemos que a circunferência assim obtida está circunscrita ao triângulo ou, equivalentemente, que o triângulo está INSCRITO na circunferência. Então, podemos enunciar o importante resultado : TODO TRIÂNGULO É INSCRITÍVEL (ADMITE CIRCUNFERÊNCIA CIRCUNSCRITA). O CENTRO DESTA CIRCUNFERÊNCIA É O CIRCUNCENTRO DO TRIÂNGULO!

Altura : Segmento que tem origem em um dos vértices de um triângulo e extremidade na reta suporte do lado oposto, sendo PERPENDICULAR a esta reta suporte. Todo triângulo possui três alturas. O ponto de encontro delas (ou de seus prolongamentos) é o ORTOCENTRO do triângulo.



Vejamos, por este exemplo, que o ortocentro nem sempre será interno ao triângulo. Na verdade, triângulos acutângulos têm ortocentro interno. Triângulos obtusângulos têm ortocentro externo. Já os triângulos retângulos têm o ortocentro coincidente com o vértice onde está o ângulo reto.

Propriedade Importante : No triângulo equilátero, os quatro pontos notáveis coincidem!

6.8. Casos de Congruência de Triângulos

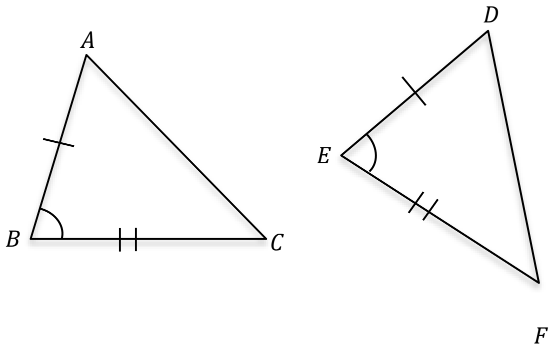
Neste texto, trabalhamos a congruência como um caso especial da semelhança. Se dois polígonos são semelhantes e a razão de semelhança for 1 então, na verdade, um polígono é a "cópia exata" do outro, ou seja, eles são congruentes.

No caso de triângulos, para concluir que eles são congruentes, podemos, primeiramente, mostrar que eles são semelhantes (encontrando, por exemplo, dois pares de ângulos respectivamente iguais nos dois – caso AA). Mostrada a semelhança, se encontrarmos um par de lados correspondentes igual nos dois (lados opostos a ângulos iguais), aí sim podemos concluir a congruência. Foi o que foi feito na demonstração da propriedade 3, por exemplo.

Mas, no caso de triângulos, existem teoremas que dizem especificamente sobre a congruência. São os CASOS DE CONGRUÊNCIA. Vamos enunciá-los aqui para que nosso texto fique completo. Podem ser usados em exercícios e demonstrações, se necessário. Símbolo usado para congruência : ($\equiv$).

Caso de Congruência 1 : (LADO – ÂNGULO – LADO (LAL))

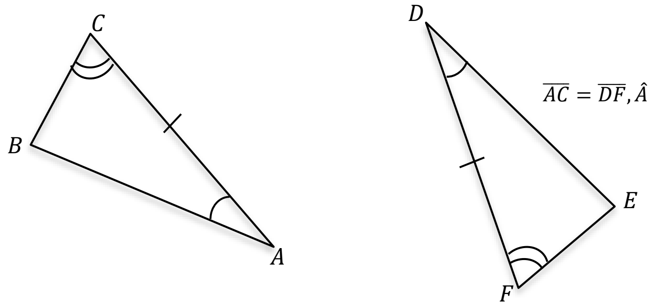
Se dois triângulos são tais que dois lados de um deles são respectivamente iguais a dois lados do segundo, e se os ângulos formados por esses lados for igual nos dois triângulos, então eles são congruentes.



$\overline{AB} = \overline{DE}, \overline{BC} = \overline{EF}$ e $\hat{B} = \hat{E} \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta DEF$

Caso de Congruência 2 : (ÂNGULO – LADO – ÂNGULO (ALA))

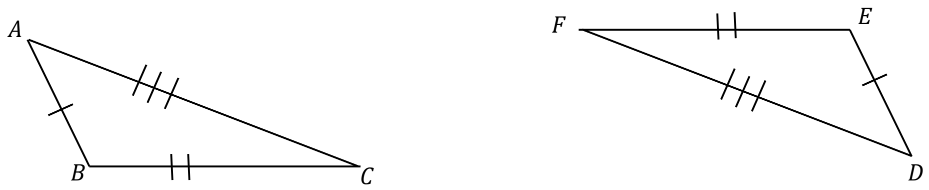
Se dois triângulos são tais que dois ângulos de um deles são respectivamente iguais a dois ângulos do segundo, e se o lado comum a estes dois ângulos for igual nos dois triângulos, então eles são congruentes.



$\overline{AC} = \overline{DF}, \hat{A} = \hat{D}$ e $\hat{C} = \hat{F} \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta DEF$

Caso de Congruência 3 : (LADO – LADO – LADO (LLL))

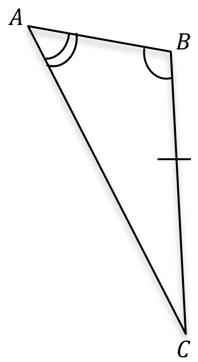
Se os três lados de um triângulo forem respectivamente iguais aos três lados do segundo, então eles são congruentes.

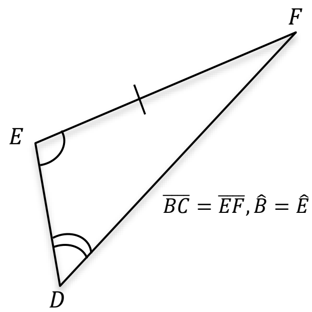


$\overline{AB} = \overline{DE}, \overline{BC} = \overline{EF}$ e $\overline{AC} = \overline{DF} \Longrightarrow \Delta ABC \equiv \Delta DEF$

Caso de Congruência 4 : (LADO – ÂNGULO – ÂNGULO OPOSTO (LAA$_O$))

Se dois triângulos são tais que um lado de um seja igual a um lado do outro, um ângulo adjacente a este lado no primeiro seja igual ao ângulo adjacente ao lado igual no segundo e ainda se os ângulos opostos a este lado nos dois triângulos forem iguais, então eles são congruentes.

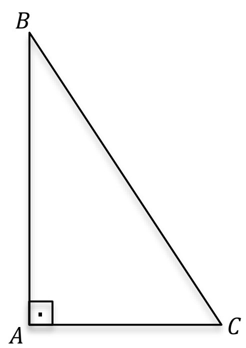


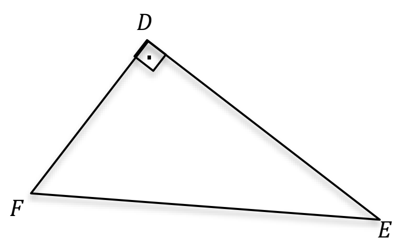


$\overline{BC} = \overline{EF}, \hat{B} = \hat{E}$ e $\hat{A} = \hat{D} \Longrightarrow \Delta ABC \equiv \Delta DEF$

Caso de Congruência 5 : (CASO ESPECIAL CATETO – HIPOTENUSA (CE))

Se dois triângulos retângulos possuem suas hipotenusas com a mesma medida e um par de catetos iguais (um cateto em cada um deles), então eles são congruentes.





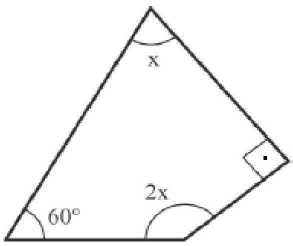
$\overline{BC} = \overline{EF}, \overline{AC} = \overline{DF} \Longrightarrow \Delta ABC \equiv \Delta DEF$

Capítulo 7 : Quadriláteros

7.1. Conceito

Chamamos de quadrilátero a qualquer polígono de 4 lados. Um primeiro resultado interessante é que a soma dos quatro ângulos internos de qualquer quadrilátero é sempre igual a 360^o. Com efeito, todo quadrilátero pode ser dividido, por uma de suas diagonais, em dois triângulos. Logo, a soma dos ângulos do quadrilátero equivale à soma dos ângulos de dois triângulos, ou seja, $2 \times 180^o = 360^o$.

Exemplo 1 : No quadrilátero a seguir, calcule o valor de x :



Resolução :

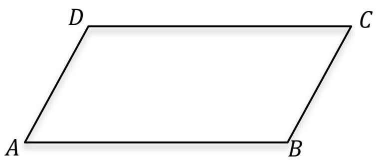
$$x + 90^o + 2x + 60^o = 360^o$$
$$3x = 360^o - 150^o$$
$$3x = 210^o$$
$$x = 70^o$$

Resposta : $x = 70^o$.

Disponível em : https://www.ime.unicamp.br/~chico/ma092/MA092_ex3.pdf

7.2. Paralelogramos

A primeira classe de quadriláteros notáveis que vamos estudar é a dos PARALELOGRAMOS. Paralelogramo é o quadrilátero que possui os lados opostos paralelos.

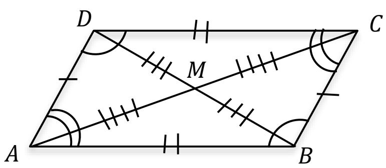


$ABCD$ é um paralelogramo : $AB//CD$ e $AD//BC$.

A seguir, vamos listar as propriedades principais dessa classe de quadriláteros. Não iremos demonstrar todas.

Em todo paralelogramo :

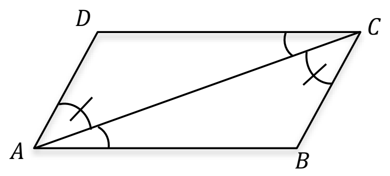
a) Ângulos opostos são iguais.
b) Ângulos adjacentes são suplementares.
c) Lados opostos são iguais.
d) Diagonais cortam-se ao meio.



$ABCD$ é paralelogramo. Então :

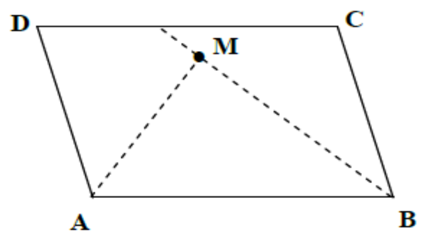
a) $\hat{A} = \hat{C}$ e $\hat{B} = \hat{D}$
b) $\hat{A} + \hat{D} = 180^o$ e $\hat{B} + \hat{C} = 180^o$
c) $\overline{AD} = \overline{BC}$ e $\overline{AB} = \overline{CD}$
d) $\overline{BM} = \overline{MD}$ e $\overline{AM} = \overline{MC}$

Demonstração de a) : Consideremos um paralelogramo $ABCD$ e sua diagonal AC :



Por ser paralelogramo, temos que $AB//CD$. Considerando a transversal AC, temos que os ângulos $A\hat{C}D$ e $C\hat{A}B$ são iguais (alternos internos). Da mesma forma, temos que $AD//BC$ (por ser paralelogramo). Considerando novamente a transversal AC, temos que os ângulos $D\hat{A}C$ e $A\hat{C}B$ também são alternos internos e, portanto, iguais. Pelo caso AA, concluímos que os triângulos ABC e CDA são semelhantes. Como os lados correspondentes AC e CA são, na verdade, coincidentes, temos que a razão de semelhança é 1 e, na verdade, os triângulos são CONGRUENTES (curiosidade). Da semelhança, tiramos que $\hat{B} = \hat{D}$. E, além disso : $\hat{A} = C\hat{A}B + D\hat{A}C = A\hat{C}D + A\hat{C}B = \hat{C}$, como queríamos demonstrar.

Exemplo 2 : No paralelogramo a seguir, temos $\hat{B} = 80^o$, BM é bissetriz do ângulo $\hat{B}$ e AM é bissetriz do ângulo $\hat{A}$. Determine a medida do ângulo $A\widehat{M}B$.



Disponível em : https://pt-static.z-dn.net/files/dbc/decb5ef390818c4064b97f94afed2d3d.pdf

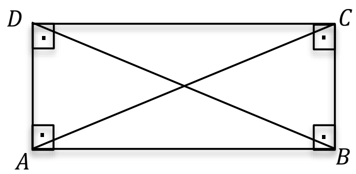
Resolução : Como BM é bissetriz de $\hat{B}$, temos que $M\hat{B}A = 40^o$. Como $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são ângulos adjacentes de um paralelogramo, temos que $\hat{A} + \hat{B} = 180^o$. Portanto, $\hat{A} = 100^o$ e, como AM é bissetriz, temos que $M\hat{A}B = 50^o$. Somando os ângulos do ΔAMB, temos : $A\widehat{M}B + 50^o + 40^o = 180^o \Rightarrow A\widehat{M}B = 90^o$.

Resposta : $A\widehat{M}B = 90^o$.

7.3. Tipos Especiais de Paralelogramos

Dentro da classe dos paralelogramos, temos alguns especiais. São eles :

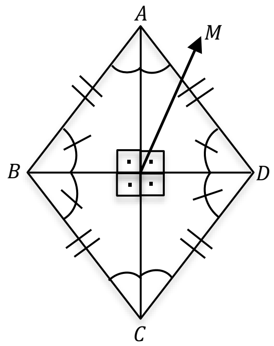
Retângulo : É o paralelogramo que possui os quatro ângulos retos. Como os retângulos são paralelogramos, as quatro propriedades da seção anterior são válidas para eles. Mas, além dessas, o retângulo possui mais uma propriedade especial : **em qualquer retângulo, as diagonais são IGUAIS**, ou seja, têm a mesma medida (tente demonstrar isso).



$ABCD$ é retângulo $\Rightarrow \overline{AC} = \overline{BD}$

Losango : É o paralelogramo que possui os quatro lados iguais, ou seja, com a mesma medida. Como os losangos são paralelogramos, as quatro propriedades da seção anterior são válidas para eles. Mas, além dessas, o losango possui ainda mais duas propriedades especiais :

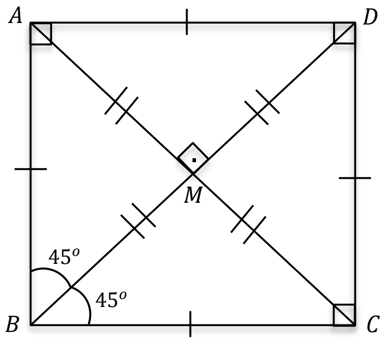
a) As diagonais são perpendiculares.
b) As diagonais são bissetrizes de seus ângulos.



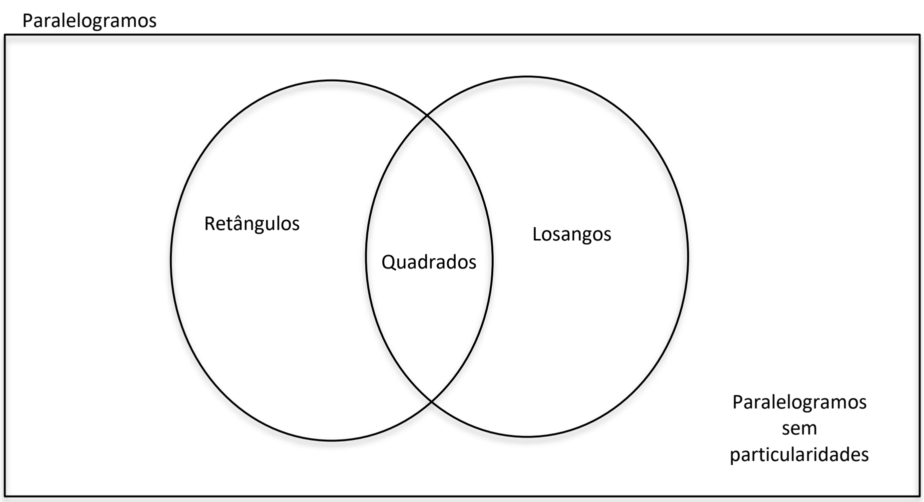
$ABCD$ é losango ($\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$). Então :

a) AC é $perpendicular\ a\ BD$.
b) $B\hat{A}M = D\hat{A}M = B\hat{C}M = D\hat{C}M$ e
$A\hat{B}M = C\hat{B}M = A\hat{D}M = C\hat{D}M$

Quadrado : É o paralelogramo que é retângulo e losango, ao mesmo tempo. Isso que dizer que o quadrado tem os quatro ângulos retos e os quarto lados com a mesma medida. Veja que, neste quadrilátero, valem todas as propriedades estudadas até agora : as de paralelogramo, a de retângulo e as de losango!

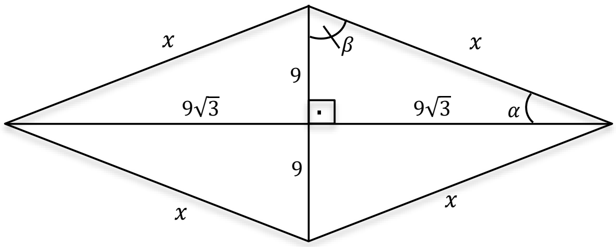


Se quiséssemos, poderíamos representar o “conjunto” de todos os paralelogramos através do Diagrama de Venn, assim :



Exemplo 3 : Um losango possui as diagonais medindo $18\ cm$ e $18\sqrt{3}\ cm$. Calcule a medida do lado e dos ângulos internos desse losango.

Resolução : Num losango, sabemos que as diagonais cortam-se ao meio (pois ele é um paralelogramo) e são perpendiculares :



Aplicando-se o Teorema de Pitágoras a qualquer um dos quatro triângulos retângulos formados, encontramos a medida do lado do losango :

$$x^2 = 9^2 + \left(9\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow x^2 = 81 + 243 = 324 \Rightarrow x = 18cm$$

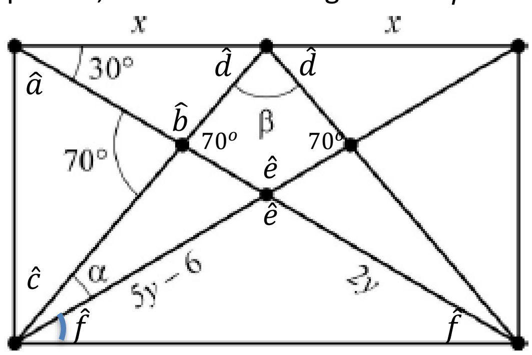
Olhando, por exemplo, para o triângulo superior direito, temos :

$$sen\ \alpha = \frac{9}{18} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^o\ (sabemos\ que\ \alpha\ \text{é}\ agudo)$$

Logo : $\beta = 60^o$. Como, nos losangos, sabemos que as diagonais são bissetrizes de seus ângulos, concluímos que os ângulos internos dele serão 60^o e 120^o.

Resposta : Os lados do losango medem $18cm$ cada. Ele possui dois ângulos internos de 60^o e dois de 120^o.

Exemplo 4 : A figura abaixo mostra um retângulo cortado por alguns segmentos de reta. Sabendo que as distâncias indicadas na figura se referem aos segmentos entre dois pontos, determine os ângulos $\alpha\ e\ \beta$ e o valor de y.



Disponível em : https://www.ime.unicamp.br/~chico/ma092/MA092_ex3.pdf

Resolução : No retângulo, os ângulos internos são retos : $\hat{a} + 30^o = 90^o \Rightarrow \hat{a} = 60^o$. Os ângulos $\hat{b}\ e\ 70^o$ são suplementares : $\hat{b} + 70^o = 180^o \Rightarrow \hat{b} = 110^o$. No triângulo lateral à esquerda, temos : $\hat{a} + 70^o + \hat{c} = 180^o \Rightarrow \hat{c} = 180^o - 60^o -$

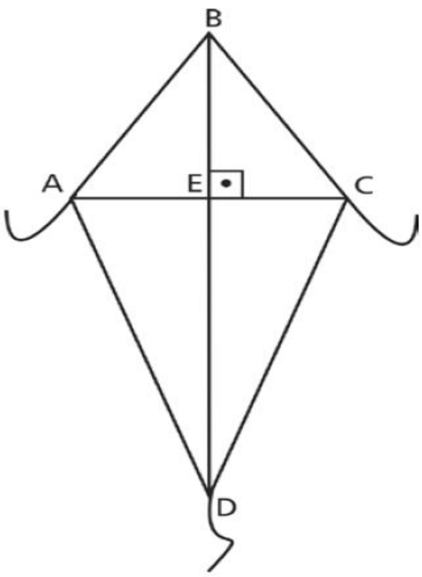
$70^o = 50^o$. No triângulo superior à esquerda, temos : $\hat{b} + 30^o + \hat{d} = 180^o \Rightarrow \hat{d} = 180^o - 140^o = 40^o$. Explorando a simetria da figura e usando argumentos de congruência de triângulos, vemos que o outro ângulo indicado também tem a medida $\hat{d}$ (justifique). Logo : $2\hat{d} + \beta = 180^o \Rightarrow \beta = 180^o - 80^o = 100^o$. Olhando para o quadrilátero superior na figura : $\beta + 70^0 + 70^o + \hat{e} = 360^o \Rightarrow \hat{e} = 360^o - 140^o - 100^o = 120^o$. O triângulo que tem como vértices o centro do retângulo (ponto onde se encontram as duas diagonais) e os dois vértices inferiores do mesmo retângulo é isósceles. Isso acontece porque, num retângulo, as diagonais se cortam ao meio e são iguais. Logo, os quatro "pedaços" em que se dividem as diagonais são todos de mesma medida. Assim : $\hat{e} + 2\hat{f} = 180^o \Rightarrow 2\hat{f} = 60^o \Rightarrow \hat{f} = 30^o$. Pelo motivo de o triângulo ser isósceles, já podemos calcular y, pois : $5y - 6 = 2y \Rightarrow 3y = 6 \Rightarrow y = 2$. Finalmente, temos que $\hat{c} + \alpha + \hat{f} = 90^o$ (ângulo interno do retângulo). Então : $\alpha = 90^o - 50^o - 30^o = 10^o$.

Resposta : $\alpha = 10^o, \beta = 100^o\ e\ y = 2$.

OBS : Os ângulos indicados por $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}, \hat{e}, \hat{f}$ não estão indicados na figura original (foram colocados para auxiliar o entendimento da resolução). Assim como os dois de 70^o colocados dentro do quadrilátero superior menor.

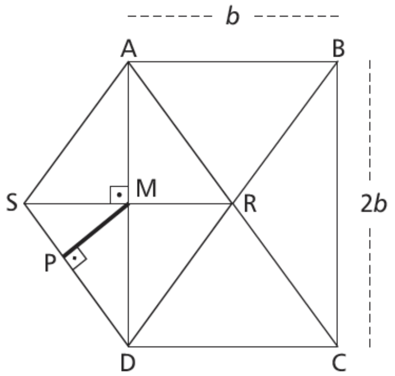
Exercícios Propostos

1) (CEFET/MG – 2016) Uma pipa, cuja figura é mostrada a seguir, foi construída no formato do quadrilátero $ABCD$, sendo $\overline{AB} \equiv \overline{BC}\ e\ \overline{AD} \equiv \overline{CD}$. A vareta $\overline{BD}$ da pipa intercepta a vareta $\overline{AC}$ em seu ponto médio E, formando um ângulo reto. Na construção dessa pipa, as medidas de $\overline{BC}\ e\ \overline{BE}$ usadas são, respectivamente, $25cm\ e\ 20cm$, e a medida de $\overline{AC}$ equivale a $\frac{2}{5}$ da medida de $\overline{BD}$. Nessas condições, a medida de $\overline{DE}$, em cm, é igual a :



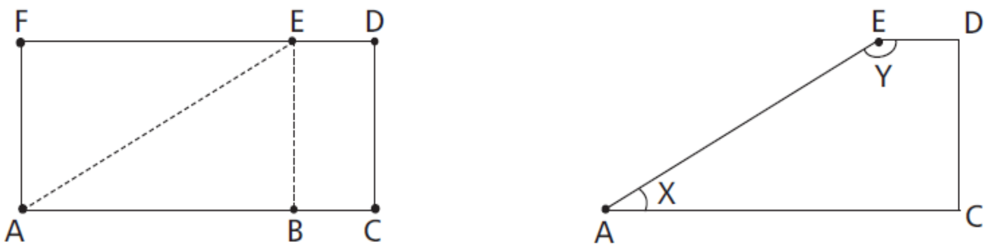
a) 25
b) 40
c) 55
d) 70

2) (CEFET/MG – 2014) Nessa figura, ABCD é um retângulo cujos lados medem b e $2b$. O ponto R pertence aos segmentos AC e BD e, ARDS é um quadrilátero em que M é o ponto médio do segmento RS. O segmento MP, expresso em função de b é :



a) $\frac{b\sqrt{5}}{5}$
b) $\frac{b\sqrt{5}}{3}$
c) $\frac{2b\sqrt{5}}{3}$
d) $\frac{3b\sqrt{5}}{5}$

3) (CEFET/MG – 2012) Uma folha retangular de papel ofício de medidas $287 \times 210\ mm$ foi dobrada conforme a figura :

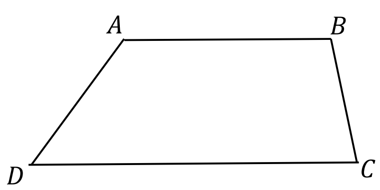


Os ângulos $\hat{X}$ e $\hat{Y}$ resultantes da dobradura medem, respectivamente, em graus :

a) 40 e 90
b) 40 e 140
c) 45 e 45
d) 45 e 135

7.4. Trapézios

A definição mais rigorosa de trapézio diz que ele é o quadrilátero que possui dois lados paralelos. Segundo esta definição, os paralelogramos seriam tipos especiais de trapézios. Esta definição tenta fazer com que conceitos como a *aproximação trapezoidal para a integral definida*, por exemplo, fiquem bem definidos. Porém, em nosso caso, os paralelogramos foram estudados separadamente. Então, nesta seção, estudaremos apenas os trapézios que têm **dois lados paralelos e dois não-paralelos** (trapézio propriamente dito).

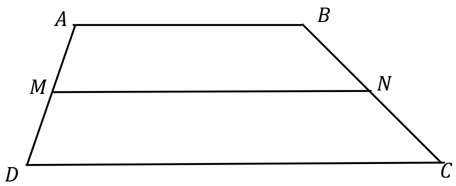


$ABCD$ é um trapézio ($AB//CD$).
Como $AB//CD$, temos que :

$$\hat{A} + \hat{D} = 180^o \ e \ \hat{B} + \hat{C} = 180^o$$

O primeiro par de ângulos são colaterais internos segundo a transversal AD. Já o segundo par são colaterais internos pela transversal BC.
$AB\ e\ CD$ são as BASES do trapézio.

Uma propriedade interessante dos trapézios é que, ao unir-se os pontos médios dos lados não paralelos, obtemos um segmento paralelo às bases e que tem como medida a média aritmética delas. É a BASE MÉDIA do trapézio.

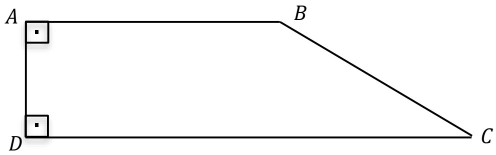


Na figura, MN é base média do trapézio $ABCD$ (M é ponto médio de AD e N é ponto médio de BC). Então :

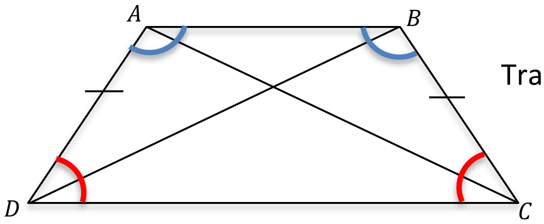
$$\overline{MN} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2}$$

Os trapézios podem ser classificados em :

Trapézio Retângulo : Possui dois ângulos retos.



Trapézio Isósceles : Os lados não paralelos são iguais (possuem a mesma medida).

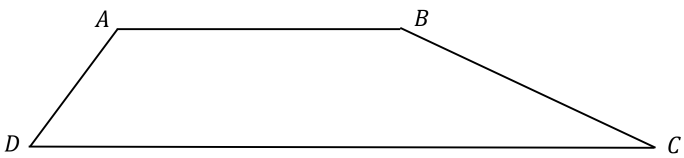


Trapézio Isósceles
$\overline{AD} = \overline{BC}$

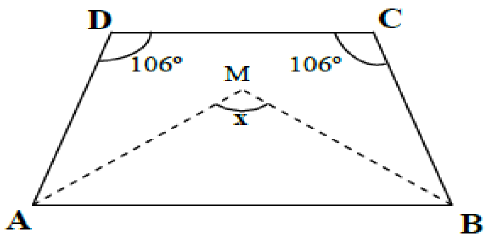
Os trapézios isósceles possuem mais duas propriedades adicionais :

- Num trapézio isósceles, as diagonais têm a mesma medida : $\overline{AC} = \overline{BD}$.
- Num trapézio isósceles, os ângulos da mesma base têm a mesma medida : $\hat{A} = \hat{B}$ e $\hat{C} = \hat{D}$.

Trapézio Escaleno : Sem particularidades.



Exemplo 5 : A figura a seguir é um trapézio isósceles. Sabendo que AM está contido na bissetriz do ângulo $\hat{A}$ e que BM está contido na bissetriz do ângulo $\hat{B}$, o valor de x, em graus, é :



a) 74
b) 36
c) 104
d) 106

Disponível em : https://pt-static.z-dn.net/files/dbc/decb5ef390818c4064b97f94afed2d3d.pdf

Resolução : No trapézio, $\hat{A} + \widehat{D} = 180^o$. Assim : $\hat{A} + 106^o = 180^o \Rightarrow \hat{A} = 74^o$. Como o trapézio é isósceles, temos que $\hat{B} = \hat{A} = 74^o$. Os ângulos da base do triângulo AMB são iguais a $\frac{74^o}{2} = 37^o$, pois $AM\ e\ BM$ são bissetrizes de $\hat{A}\ e\ \hat{B}$, respectivamente. Logo, no triângulo AMB, temos :

$$x + 37^o + 37^o = 180^o \Rightarrow x = 106^o$$

Resposta : D.

7.5. Quadriláteros : Inscrição e Circunscrição à Circunferência

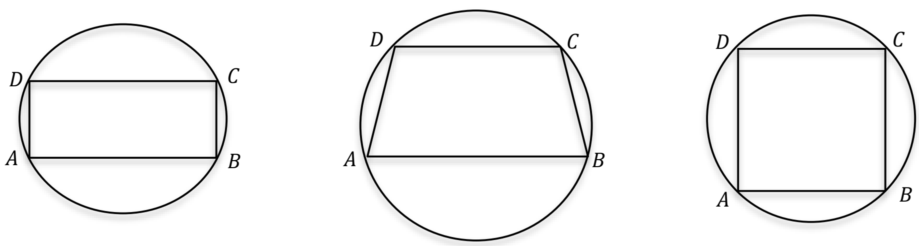
Dizemos que um polígono está inscrito em uma circunferência quando todos os seus vértices estão nesta circunferência. Se é possível inscrever um polígono em uma circunferência, dizemos que ele é INSCRITÍVEL.

Dizemos que um polígono está circunscrito a uma circunferência quando todos os seus lados são tangentes a esta circunferência. Se é possível circunscrever um polígono a uma circunferência, dizemos que ele é CIRCUNSCRITÍVEL.

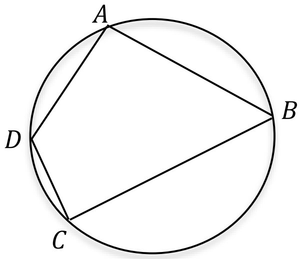
No capítulo anterior, vimos que qualquer triângulo é sempre inscritível e circunscritível. O mesmo não ocorre para os quadriláteros. Os dois teoremas a seguir (que não serão demonstrados) informam as condições necessárias e suficientes para a inscrição e circunscrição de quadriláteros.

Teorema 1 : Um quadrilátero é inscritível se, e somente se, possui ângulos opostos suplementares.

Desse modo, vemos que, dos quadriláteros estudados, são sempre inscritíveis o retângulo, o quadrado e o trapézio isósceles.

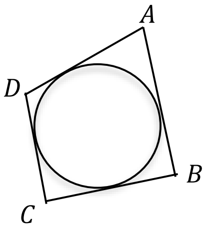


As figuras mostram, respectivamente, um retângulo, um trapézio isósceles e um quadrado inscritos. Nos três casos, vemos que : $\hat{A} + \hat{C} = 180^o$ e $\hat{B} + \widehat{D} = 180^o$.



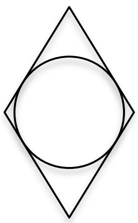
$\hat{A} + \hat{C} = 180^o$ e $\hat{B} + \hat{D} = 180^o$

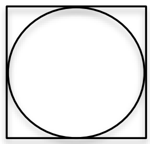
Teorema 2 : Um quadrilátero é circunscritível se, e somente se, as somas dos lados opostos são iguais.



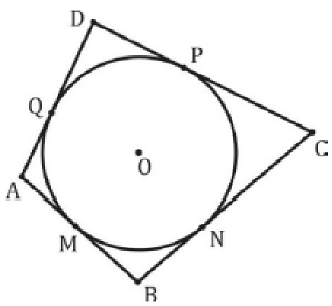
$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$

Dos quadriláteros estudados, são sempre circunscritíveis o quadrado e o losango.





Exemplo 6 : Determine o comprimento da aresta $\overline{CD}$ do quadrilátero a seguir, sabendo que $\overline{AM} = 11, \overline{BM} = 13, \overline{BC} = 36\ e\ \overline{AD} = 26$:

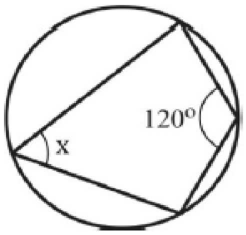


Resolução : Como o quadrilátero é circunscritível, temos que a soma dos lados opostos deve ser igual :

$$\overline{CD} + \overline{AB} = \overline{AD} + \overline{BC}$$
$$\overline{CD} + 11 + 13 = 36 + 26$$
$$\overline{CD} = 38$$

Disponível em : https://www.ime.unicamp.br/~chico/ma092/MA092_ex4.pdf

Exemplo 7 : Determine o valor de x :



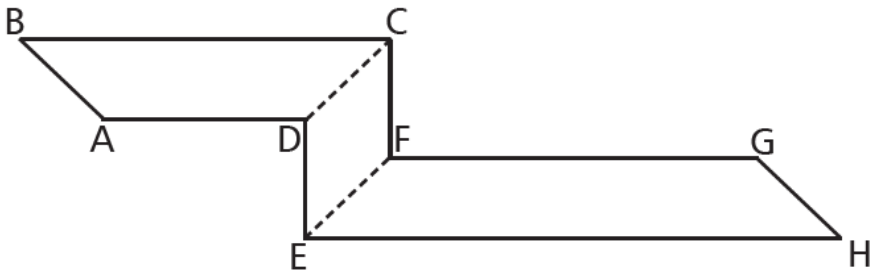
Resolução : Num quadrilátero inscritível, os ângulos opostos são suplementares. Logo :

$$x + 120^o = 180^o \Rightarrow x = 60^o$$

Disponível em : https://www.ime.unicamp.br/~chico/ma092/MA092_ex4.pdf

Exercícios Propostos

4) (CEFET/MG – 2015) A figura abaixo é plana e composta por dois trapézios isósceles e um losango :



O comprimento da base maior do trapézio ABCD é igual ao da base menor do trapézio EFGH, que vale $2x$ e, a base maior de cada trapézio é o dobro da base menor, e o lado EF do losango vale y. O perímetro da figura dada, expresso em função de x e y é :

a) $6x + 4y$
b) $9x + 4y$
c) $12x + 2y$
d) $15x + 2y$

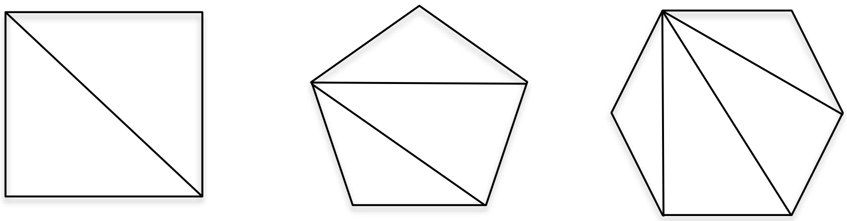
Capítulo 8 : Polígonos Regulares

8.1. Conceito

Polígono Regular é aquele que possui todos os lados com a mesma medida e todos os ângulos internos iguais. Desse modo, o polígono regular de três lados é o triângulo equilátero. O de quatro lados é o quadrado. A partir daí, o polígono regular recebe o nome genérico do polígono de n lados, seguido da palavra "regular" : pentágono regular, hexágono regular, heptágono regular, octógono regular, etc.

8.2. Soma dos Ângulos Internos e Ângulo Interno

Para calcular a soma dos ângulos internos de um polígono regular, basta ver que ele pode ser dividido em vários triângulos. Tomamos um dos vértices dele e traçamos diagonais, unindo este vértice a todos os outros, exceto aos dois adjacentes a ele (pois, nesse caso, formaríamos lados e não diagonais). Podemos facilmente verificar que podemos dividir um polígono regular de n lados em $(n-2)$ triângulos. Observe os exemplos :



Quadrado (dois triângulos) | Pentágono Regular (três triângulos) | Hexágono Regular (quatro triângulos)

Desse modo, a soma dos ângulos internos de um polígono regular será dada pela fórmula (veja que este procedimento e esta fórmula não são válidos só para polígonos REGULARES) :

$$\boldsymbol{S_i = (n-2).180^o}$$

Já que, no polígono regular, todos os ângulos internos são iguais, podemos calcular o valor de cada um deles (agora sim, esta fórmula vale só para polígonos REGULARES) :

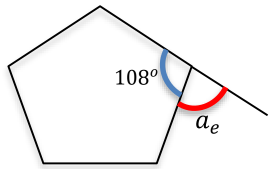
$$\boldsymbol{a_i = \frac{(n-2).180^o}{n}}$$

Exemplo 1 : Calcular o soma dos ângulos internos e o valor de cada ângulo interno de um pentágono regular.

Resolução : Basta substituir, nas fórmulas, o n por 5 :

$$S_i = (5-2).180^o = 3 \times 180^o = 540^o \; e \; a_i = \frac{540^0}{5} = 108^o$$

Resposta : Cada ângulo interno mede 108^o e a soma deles vale 540^o.



8.3. Ângulo Externo e Soma dos Ângulos Externos

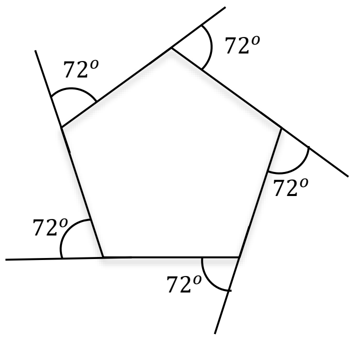
Prolongando-se o lado do polígono regular, encontramos um ângulo externo dele (como é mostrado na figura acima, da seção anterior). Portanto, cada ângulo externo de um polígono regular mede :

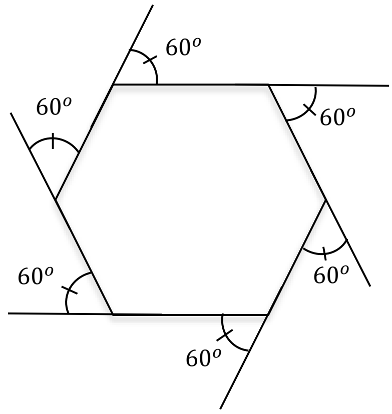
$$a_e = 180^o - a_i = 180^o - \frac{(n-2).180^o}{n} = 180^o\left[1 - \frac{n-2}{n}\right] = 180^o\left[\frac{n-(n-2)}{n}\right]$$

$$a_e = 180^o.\frac{2}{n} \Rightarrow \boldsymbol{a_e} = \frac{\mathbf{360^o}}{\boldsymbol{n}}$$

O fato interessante é que a soma dos ângulos externos de um polígono regular não depende do número de lados, sendo sempre constante e igual a 360^o :

$$S_e = \frac{360^o}{n}.n \Rightarrow \boldsymbol{S_e} = \mathbf{360^o}$$





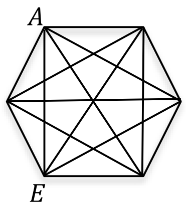
O fato de a soma dos ângulos externos ser 360^o vale também em outros polígonos, não só nos regulares.

8.4. Número de Diagonais

Para formar diagonais, ligamos cada vértice aos outros, exceto três : ele mesmo e os dois adjacentes (pois formam lados, não diagonais). Como o polígono tem n vértices, o total de diagonais deveria ser $n(n-3)$. Mas, fazendo simplesmente $n(n-3)$, contamos cada diagonal duas vezes. Isso ocorre porque, ao passar pelo vértice A, por exemplo, contamos a diagonal AE. Ao passar pelo vértice E, contamos a diagonal EA, que é a mesma! Então, o número de diagonais de um polígono regular (veja que esta fórmula também não é válida apenas para polígonos REGULARES) é :

$$\boldsymbol{d = \frac{n(n-3)}{2}}$$

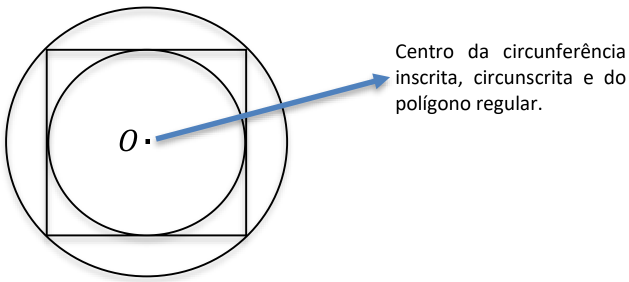
Por exemplo, o número de diagonais de um hexágono regular é : $d = \frac{6.(6-3)}{2} = 9$ diagonais!



8.5. Inscrição e Circunscrição

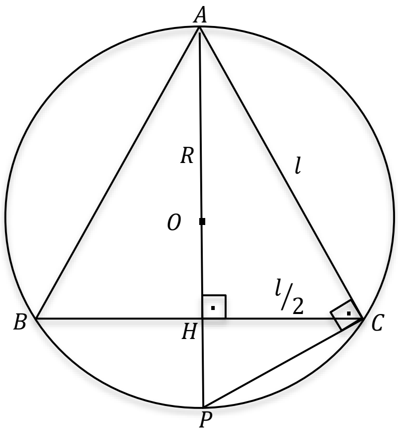
A definição dada para triângulos e quadriláteros se estende a outros polígonos. Dizemos que um polígono é INSCRITÍVEL quando é possível construir uma circunferência que contenha todos os seus vértices (a circunferência está circunscrita ao polígono ou o polígono está inscrito na circunferência). E dizemos que um polígono é CIRCUNSCRITÍVEL quando é possível construir uma circunferência que seja tangente a todos os seus lados (a circunferência está inscrita no polígono ou o polígono está circunscrito à circunferência). Em síntese (para não confundir) : quem está inscrito está "por dentro", quem está circunscrito está "por fora".

O resultado importante (que não será demonstrado) é que TODO POLÍGONO REGULAR É TANTO INSCRITÍVEL QUANTO CIRCUNSCRITÍVEL! E mais : as duas circunferências (tanto a inscrita quanto a circunscrita ao polígono) têm o mesmo centro. Este centro comum pode ser chamado, simplesmente, de centro do polígono regular!



A seguir, vamos deduzir (apenas mostrar resumidamente os passos da dedução) qual a relação entre o lado dos principais polígonos regulares e o raio da circunferência inscrita e circunscrita a ele.

A) Triângulo Equilátero Inscrito na Circunferência

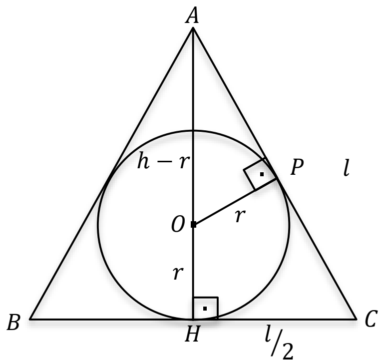


Os triângulos ACP e AHC são semelhantes (no próximo capítulo veremos porque o ângulo $A\hat{C}P$ é reto). Justifique também porque $A\hat{H}C$ é reto. Da semelhança, temos :

$$\frac{AP}{AC}=\frac{AC}{AH}\Rightarrow\frac{2R}{l}=\frac{l}{{l\sqrt{3}}/{2}}\Rightarrow 2R.\frac{l\sqrt{3}}{2}=l^2\Rightarrow R=\frac{l}{\sqrt{3}}\Rightarrow \boldsymbol{R}=\frac{\boldsymbol{l\sqrt{3}}}{\boldsymbol{3}}$$

Veja que já sabemos que $AH=\frac{l\sqrt{3}}{2}$ (altura do triângulo equilátero – página 63).

B) Triângulo Equilátero Circunscrito à Circunferência



Os triângulos APO e AHC são semelhantes (no próximo capítulo veremos porque o ângulo $A\hat{P}O$ é reto). Justifique também porque $A\hat{H}C$ é reto. Da semelhança, temos :

$$\frac{AO}{AC}=\frac{OP}{HC}\Rightarrow\frac{h-r}{l}=\frac{r}{{l}/{2}}\Rightarrow\frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}-r}{l}=\frac{2r}{l}\Rightarrow\frac{l\sqrt{3}-2r}{2}=2r\Rightarrow 4r=l\sqrt{3}-2r$$

$$\Rightarrow 6r=l\sqrt{3}\Rightarrow \boldsymbol{r}=\frac{\boldsymbol{l\sqrt{3}}}{\boldsymbol{6}}$$

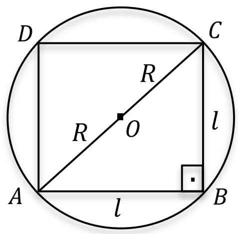
Como a altura de um triângulo equilátero é $h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$ (página 63), podemos escrever :

$$R = \frac{l\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{l\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boldsymbol{R = \frac{2}{3}h} \; e \; r = \frac{l\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{3} \times \frac{l\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boldsymbol{r = \frac{1}{3}h}$$

Isso quer dizer que, num triângulo equilátero, o seu centro (centro da circunferência inscrita ou circunscrita, pois coincidem), divide sua altura em um terço e dois terços, sendo que o raio da circunferência circunscrita ao triângulo é dois terços de sua altura, enquanto que o raio da circunferência inscrita é um terço da altura! Assim é mais "fácil" memorizar!

O raio da circunferência inscrita no polígono regular é chamado de APÓTEMA dele. O apótema é a distância entre o centro do polígono regular e um de seus lados. Podemos ver aqui, que o apótema de um triângulo equilátero é um terço de sua altura, ou seja : $\boldsymbol{a_p = \frac{l\sqrt{3}}{6}}$.

C) Quadrado Inscrito na Circunferência

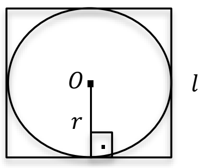


Aplicando-se o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo ABC, temos :

$$(2R)^2 = l^2 + l^2$$
$$4R^2 = 2l^2$$
$$R^2 = \frac{2l^2}{4} \Rightarrow \boldsymbol{R = \frac{l\sqrt{2}}{2}}$$

Ou seja, o raio da circunferência circunscrita ao quadrado é metade de sua diagonal (veja a diagonal do quadrado na página 63).

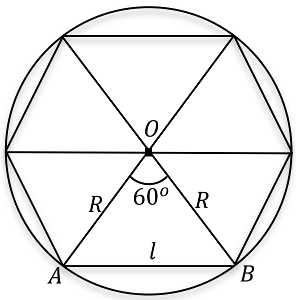
D) Quadrado Circunscrito à Circunferência



O raio da circunferência inscrita ou apótema do quadrado é dado por :

$$\boldsymbol{r = \frac{l}{2}} \; ou \; \boldsymbol{a_p = \frac{l}{2}}$$

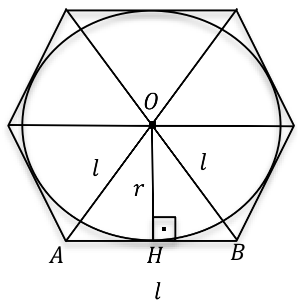
E) Hexágono Regular Inscrito na Circunferência



O ângulo $A\hat{O}B = \frac{360^o}{6} = 60^o$. Como $\overline{OA} = \overline{OB} = R$, temos que o triângulo AOB é isósceles e, portanto, $O\hat{A}B = O\hat{B}A = x$. Assim : $x + x + 60^o = 180^o \Rightarrow 2x = 120^o \Rightarrow x = 60^o$. Desse modo, vemos que o ΔOAB é, na verdade, equilátero! Então, temos que : $\boldsymbol{R = l}$.

Aliás, chegamos aqui a uma propriedade interessante do **hexágono regular : ao ligar o seu centro a cada um de seus vértices, sempre o dividimos em 6 triângulos equiláteros!** Veja que esta é, realmente, uma propriedade específica do hexágono regular. Se fizermos o mesmo com o pentágono regular, por exemplo, NÃO iremos dividi-lo em cinco triângulos equiláteros.

F) Hexágono Regular Circunscrito à Circunferência



Vemos que o raio da circunferência inscrita (ou apótema) do hexágono regular é a altura de um triângulo equilátero de lado l, que já sabemos ser :

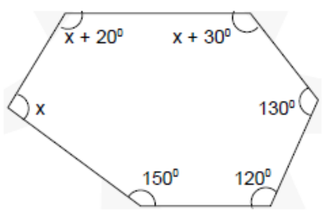
$$\boldsymbol{r = \frac{r\sqrt{3}}{2} \; ou \; a_p = \frac{l\sqrt{3}}{2}}$$

As informações obtidas nessa seção estão resumidas no quadro a seguir :

Polígonos Regulares de Lado l

	Raio da Circunferência Circunscrita	Raio da Circunferência Inscrita (Apótema)
Triângulo Equilátero	$\frac{l\sqrt{3}}{3}$	$\frac{l\sqrt{3}}{6}$
Quadrado	$\frac{l\sqrt{2}}{2}$	$\frac{l}{2}$
Hexágono Regular	l	$\frac{l\sqrt{3}}{2}$

Exemplo 2 : Na figura, calcule o valor de x :



Resolução : Apesar de não se tratar de um hexágono regular, a fórmula da SOMA dos ângulos internos é válida. Assim :

$$S_i = (6-2).180^o = 4 \times 180^o = 720^o$$

Então :

$$x + x + 20^o + x + 30^o + 130^o + 120^o + 150^o = 720^o$$
$$3x + 450^o = 720^o$$
$$3x = 270^o \Rightarrow x = 90^o$$

Disponível em : http://www.baluta.com.br/wp-content/uploads/exercicios/mat-9-ano/geometria/9polreg.pdf

Exemplo 3 : O lado de um quadrado inscrito em uma circunferência mede $5\sqrt{6}\,cm$. Determine o apótema do hexágono regular inscrito na mesma circunferência.

Disponível em : http://www.baluta.com.br/wp-content/uploads/exercicios/mat-9-ano/geometria/9polreg.pdf

Resolução : A relação entre o lado de um quadrado e o raio da circunferência circunscrita a ele é :

$$R = \frac{l\sqrt{2}}{2} \Rightarrow R = \frac{5\sqrt{6}.\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{12}}{2} = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}\,cm$$

Um hexágono regular inscrito na mesma circunferência terá o lado igual ao raio dela. Logo, o lado deste hexágono será de $5\sqrt{3}\,cm$. Já o apótema deste hexágono (raio da circunferência inscrita nele será de :

$$a_p = \frac{5\sqrt{3}.\sqrt{3}}{2} = \frac{15}{2} = 7{,}5\,cm$$

Resposta : $7{,}5\,cm$.

Exemplo 4 : Qual polígono regular tem o número de diagonais igual ao número de lados ?

Resolução : Devemos ter $d = n$:

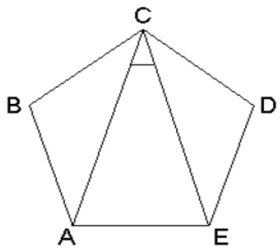
$$\frac{n(n-3)}{2} = n \Rightarrow n^2 - 3n = 2n \Rightarrow n^2 - 5n = 0 \Rightarrow n(n-5) = 0 \Rightarrow$$

$$n = 0\ (não\ serve)\ ou\ n = 5$$

Resposta : O pentágono.

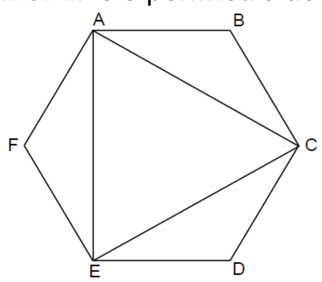
Exercícios Propostos

1) (PUC – RJ) Considere o pentágono regular $ABCDE$. Quanto vale o ângulo $A\hat{C}E$?



a) 24^o
b) 30^o
c) 36^o
d) 40^o
e) 45^o

2) (CEFET/MG – 2009) A razão entre o perímetro do hexágono regular ABCDEF e o perímetro do triângulo ACE, nessa ordem, é :

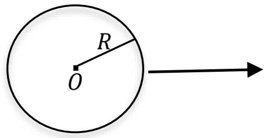


a) $1/2$
b) $\sqrt{3}/3$
c) $\sqrt{3}$
d) $2\sqrt{3}/3$

Capítulo 9 : Circunferência

9.1. Conceito

Circunferência é o lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes de um ponto fixo. Este ponto fixo é o centro da circunferência e esta distância é o seu raio.



Circunferência de centro O e raio R

9.2. Comprimento da Circunferência

O comprimento de uma circunferência de raio R é dado pela fórmula $C = 2\pi R$, onde π é um número irracional e seu valor aproximado é $3{,}14$.

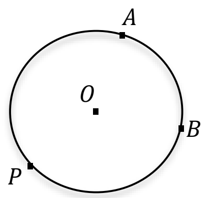
Exemplo 1 : Rui corre todos os dias ao redor da praça circular de seu bairro. Esta praça tem um raio de $75\ m$. Se Rui gosta de correr $5\ km$ todos os dias, qual o número (aproximado) de voltas diárias que ele deve dar ao redor desta praça? (Use $\pi = 3{,}14$)

Resolução : Primeiramente, calculamos o comprimento da praça, que é : $C = 2\pi R = 2 \times 3{,}14 \times 75 = 471m$. Se ele pretende correr $5km = 5000m$, temos que o número de voltas será : $voltas = \frac{5000}{471} = 10{,}62$.

Resposta : Ele deve dar "quase" 11 voltas por dia ao redor da praça.

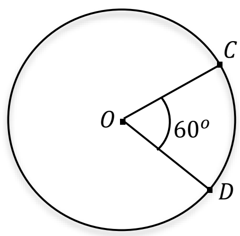
9.3. Arco de Circunferência e sua Medida

Quando marcamos dois pontos sobre uma circunferência, dividimo-la em duas partes, chamadas de "arcos de circunferência" :



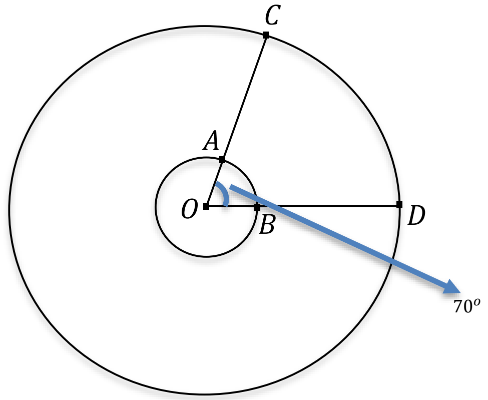
Os pontos A e B dividem a circunferência em duas partes, chamadas de arcos. Apenas para diferenciar o arco maior do menor, costumamos marcar um outro ponto sobre a circunferência para auxiliar na notação. Assim, usamos o símbolo $\overset{\frown}{AB}$ para nos referirmos ao arco menor e $\overset{\frown}{APB}$ para o arco maior.

A unidade de medida dos arcos de circunferência também é o grau. Por definição, um arco tem a mesma medida do ângulo central que ele determina :



Se o ângulo $C\hat{O}D$ mede 60^o, dizemos que a medida do arco $\overset{\frown}{CD}$ também é de 60^o, ou seja, $med(\overset{\frown}{CD}) = 60^o$ ou, simplesmente, $\overset{\frown}{CD} = 60^o$.

Observe que a medida do arco (em graus) e o seu COMPRIMENTO são coisas diferentes. Dois arcos com a mesma medida em circunferências diferentes terão comprimentos diferentes :



Observe que $\widehat{AB} = 70^o$ e $\widehat{CD} = 70^o$, mas os comprimentos destes arcos são diferentes e dependem do raio de cada circunferência envolvida.

9.4. Comprimento de Arco

O comprimento do arco de circunferência pode ser obtido, simplesmente, fazendo-se uma REGRA DE TRÊS SIMPLES. As grandezas envolvidas serão diretamente proporcionais. Observe o próximo exemplo :

Exemplo 2 : Qual é o comprimento de um arco de 48^o, em uma circunferência de raio 12 cm?

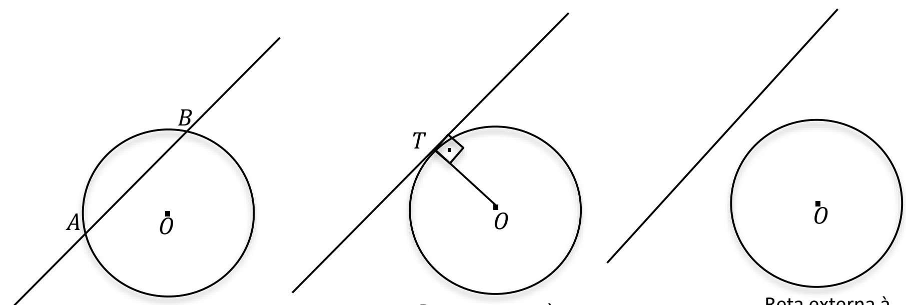
Resolução : Para um arco de 360^o (circunferência inteira), teríamos um comprimento de $C = 2\pi R = 24\pi\ cm$. Já para um arco de 48^o, o comprimento será c :

$$\frac{360^o}{48^o} = \frac{24\pi}{c} \Rightarrow c = \frac{48 \times 24\pi}{360} = 2{,}8\pi\ cm$$

9.5. Posições Relativas entre Reta e Circunferência

Uma reta pode ser :

a) Secante à circunferência : quando a intercepta em dois pontos distintos.
b) Tangente à circunferência : quando tem apenas um ponto em comum com ela.
c) Externa à circunferência : quando não tem ponto em comum com ela.



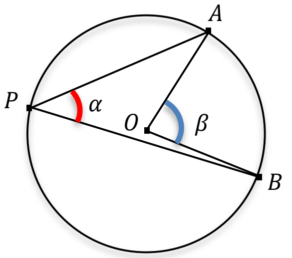
Reta secante à circunferência | Reta tangente à circunferência | Reta externa à circunferência

Um resultado extremamente importante (não será demonstrado) é que : se T é o ponto de tangência entre uma circunferência e uma reta, então o raio que liga o centro da circunferência ao ponto T é PERPENDICULAR a esta reta tangente. Isso está mostrado na figura do meio anterior. Dizemos, simplesmente, que o raio é perpendicular à tangente no ponto de tangência.

9.6. Ângulos na Circunferência

A) **Ângulo Inscrito** : Tem vértice na circunferência.

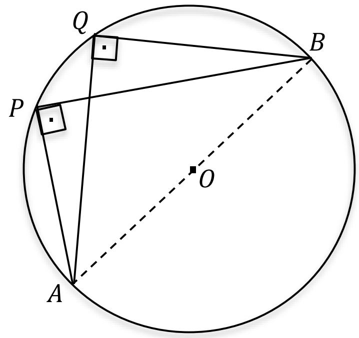
O resultado importante (não será demonstrado) é que **o ângulo inscrito mede a metade do arco que ele "enxerga"**.



$A\hat{P}B$ é um ângulo inscrito nesta circunferência.
Temos que :

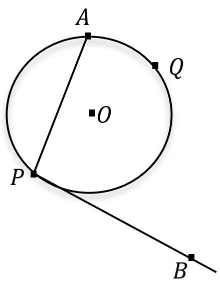
$$A\hat{P}B = \frac{\widehat{AB}}{2} \left(ou\ \alpha = \frac{\beta}{2}\right)$$

Uma consequência interessante deste resultado é que **todo ângulo inscrito numa semicircunferência é reto**.



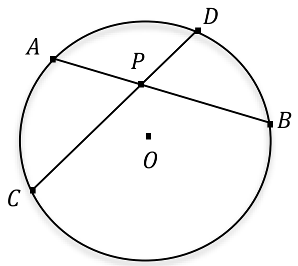
$$A\hat{P}B = A\hat{Q}B = \frac{180^o}{2} = 90^o$$

Um caso que pode ser considerado um subcaso é o do ângulo **semi-inscrito** : possui vértice na circunferência e um dos lados tangentes a ela. Também mede metade do arco correspondente.



$$A\hat{P}B = \frac{\widehat{AQP}}{2}$$

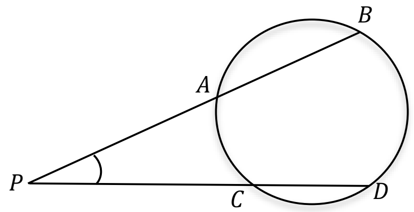
B) **Ângulo Excêntrico Interior** : Vértice interno à circunferência.
Resultado : Mede a média aritmética dos dois arcos que ele "enxerga".



$$D\hat{P}B = \frac{\widehat{AC} + \widehat{BD}}{2}$$

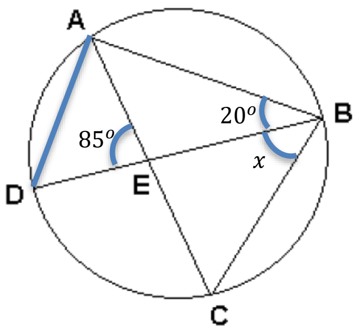
Veja que $A\hat{P}C$ tem a mesma medida de $D\hat{P}B$. Pois são opostos pelo vértice.

C) **Ângulo Excêntrico Exterior** : Vértice externo à circunferência.



Resultado : $B\hat{P}D = \frac{\widehat{BD} - \widehat{AC}}{2}$.

Exemplo 3 : (UFMG) Na figura, BD é um diâmetro da circunferência circunscrita ao triângulo ABC e os ângulos $A\hat{B}D$ e $A\hat{E}D$ medem, respectivamente, 20^o e 85^o. Assim sendo, o ângulo $C\hat{B}D$ mede :



a) 25^o
b) 35^o
c) 30^o
d) 40^o

Disponível em : https://www.prevest.com.br/dados/editor/file/LISTA_DE_EXERC_CIOS_1__ANO.pdf

Resolução : Temos que $D\hat{A}B = 90^o$, pois está inscrito numa semicircunfência (BD é diâmetro). Olhando para o triângulo DAB, temos que :

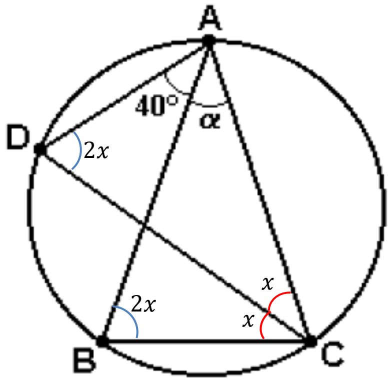
$$A\hat{D}B + 20^o + 90^o = 180^o \Rightarrow A\hat{D}B = 70^o$$

Mas o ângulos $A\hat{D}B$ e $A\hat{C}B$ são iguais, pois ambos são inscritos na circunferência e "enxergam" o arco $\widehat{AB}$. Logo : $A\hat{C}B = 70^o$. Temos também que $B\hat{E}C = 85^o$, pois é oposto pelo vértice a $A\hat{E}D$. No triângulo BEC, temos :

$$x + 85^o + 70^o = 180^o \Rightarrow x = 25^o$$

Resposta : A.

Exemplo 4 : (Ufes) Na figura, $A, B, C\ e\ D$ são pontos de uma circunferência, a corda CD é bissetriz do ângulo $A\hat{C}B$ e as cordas $AB\ e\ AC$ têm o mesmo comprimento. Se o ângulo $B\hat{A}D$ mede 40^o, a medida do ângulo $B\hat{A}C$ é :



a) 10^o
b) 15^o
c) 20^o
d) 25^o
e) 30^o

Disponível em : https://www.prevest.com.br/dados/editor/file/LISTA_DE_EXERC_CIOS_1__ANO.pdf

Resolução : Chamemos o ângulo $A\hat{B}C$ de $2x$. Então, temos que $A\hat{C}B$ também é igual a $2x$, pois $\overline{AB} = \overline{AC}$, o que torna o triângulo ABC isósceles de base BC. Como CD é bissetriz de $A\hat{C}B$, então $A\hat{C}D = D\hat{C}B = x$. Além disso, temos que $A\hat{D}C\ e\ A\hat{B}C$ são iguais, pois ambos estão inscritos na circunferência e valem a metade do arco $\widehat{AC}$.

Realizando a soma dos ângulos internos dos triângulos $ABC\ e\ ADC$, obtemos o seguinte sistema de equações :

$$\begin{cases} \alpha + 2x + x + x = 180^o \\ \alpha + 40^o + 2x + x = 180^o \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 4x = 180^o \\ \alpha + 3x = 140^o \end{cases}$$

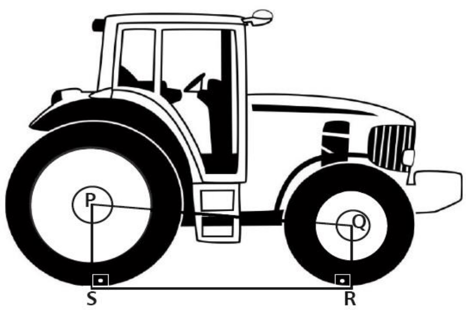
Subtraindo as equações do sistema, obtemos que : $x = 40^o$. Substituindo, por exemplo, na segunda, temos que :

$$\alpha = 140^o - 3 \times 40^o = 140^o - 120^o = 20^o$$

Resposta : C.

Exercícios Propostos

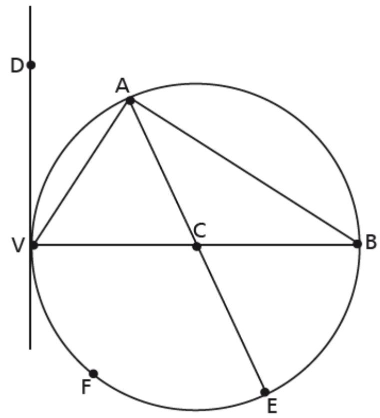
1) (CEFET/MG – 2018) No trator da figura, o raio $\overline{PS}$ da maior circunferência determinada pelo pneu traseiro é 80 cm, o raio $\overline{QR}$ da maior circunferência determinada pelo pneu dianteiro é 56 cm e as distâncias entre os centros $P\ e\ Q$ dessas circunferências é de 240 cm.



Considerando $\pi = 3$, a distância entre os pontos $S\ e\ R$, em que os pneus tocam o solo plano é :

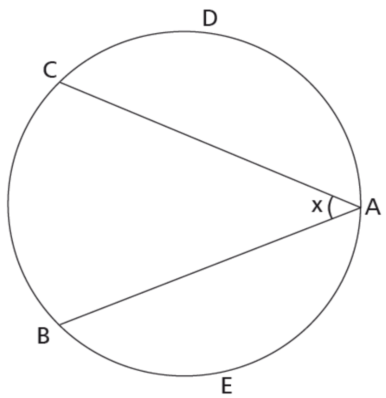
a) igual ao comprimento da circunferência de raio $\overline{PS}$.
b) maior que o comprimento da circunferência de raio $\overline{PS}$.
c) um valor entre as medidas dos comprimentos das circunferências de raios $\overline{PS}\ e\ \overline{QR}$.
d) maior que o módulo da diferença entre os comprimentos das circunferências de raios $\overline{PS}\ e\ \overline{QR}$.

2) (CEFET/MG – 2018) O triângulo ABV está inscrito em uma circunferência de centro C e o segmento $\overline{VD}$ tangencia a circunferência em V, como representado na figura a seguir. Sabendo que $med(A\hat{V}D) = 30^o$ e que a medida do raio da circunferência é igual a $\sqrt{5}\ cm$, o comprimento do arco $\widehat{VFE}$, em cm, é :



a) $\frac{\pi}{3}\sqrt{5}$
b) $\frac{2\pi}{3}\sqrt{5}$
c) $\frac{\pi}{6}\sqrt{5}$
d) 2π

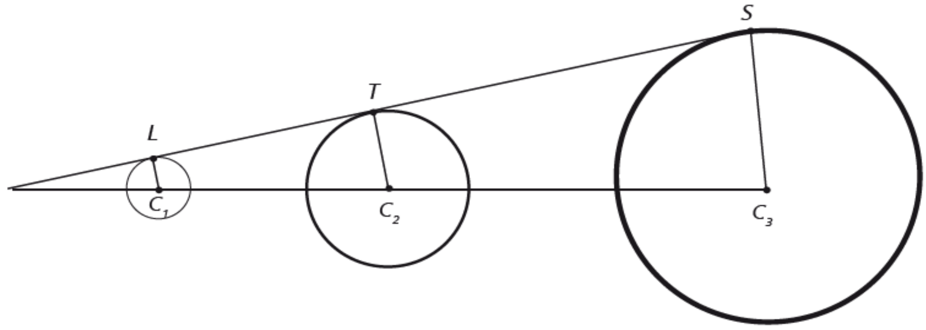
3) (CEFET/MG – 2017) A figura a seguir mostra uma circunferência, em que os arcos $\widehat{ADC}\ e\ \widehat{AEB}$ são congruentes e medem 160^o cada um. A medida, em graus, do ângulo x é :



a) 10
b) 20
c) 30
d) 40

4) (CEFET/MG – 2017) A figura a seguir é um esquema representativo de um eclipse lunar em que a Lua, a Terra e o Sol estão representados pelas circunferências de centros $C_1, C_2\ e\ C_3$, respectivamente, que se encontram alinhados. Considera-se que a distância entre os centros da Terra e do Sol é 400 vezes maior que a distância entre os centros da Terra e da Lua e que a

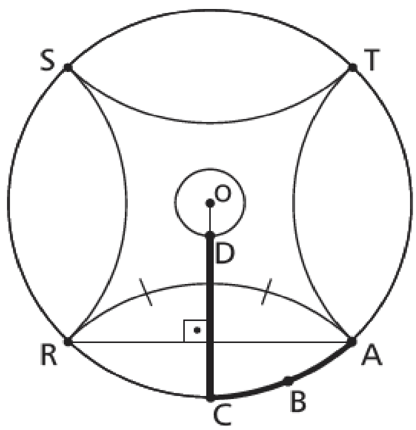
distância do ponto T na superfície da Terra ao ponto S na superfície do Sol, como representados na figura, é de 150 milhões de quilômetros.



Sabendo-se que os segmentos de reta $\overline{C_1L}, \overline{C_2T}$ e $\overline{C_3S}$ são paralelos, a distância do ponto L, representado na superfície da Lua, ao ponto T, na superfície da Terra, é igual a :

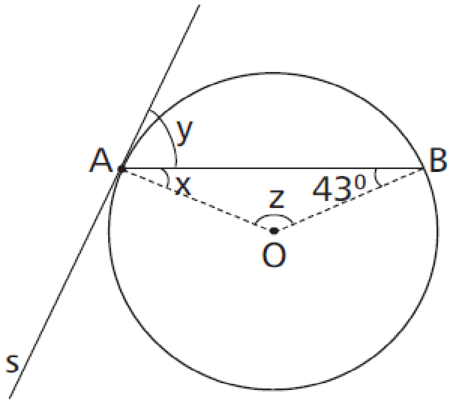
a) 375.000 km
b) 400.000 km
c) 37.500.000 km
d) 40.000.000 km

5) (CEFET/MG – 2014) Maria Campos, a mocinha do Mercado Central, caminha pela Praça Raul Soares sobre o arco $\widehat{ABC}$ e, depois, segue em linha reta até o ponto D. Um esquema simplificado da praça está desenhado a seguir, onde se apresentam duas circunferências de centro O, de raios 5 m e 42 m. Sabe-se que os pontos A, R, S e T são vértices de um quadrado. Considere $\pi = 3$. O percurso realizado por Maria, em metros, encontra-se no intervalo :



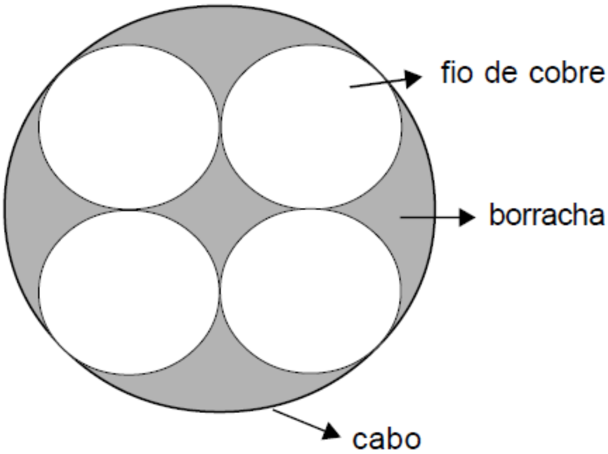
a) $[55,60[$
b) $[60,65[$
c) $[65,70[$
d) $[70,75[$

6) (CEFET/MG – 2012) Na figura seguinte, os pontos A e B pertencem à circunferência de centro O e a reta s é tangente à mesma no ponto A. O valor de $x + y + z$, em graus, é :



a) 160
b) 184
c) 196
d) 210

7) (CEFET/MG – 2009) A figura mostra o corte transversal de um cabo de alta tensão, no formato cilíndrico, composto de borracha em sua composição, e por um agrupamento de quatro fios de cobre, também cilíndricos e iguais entre si. Sabendo-se que as cinco circunferências são tangentes entre si e que a soma dos raios dos quatro fios é 8, o raio do cabo vale :



a) $2(\sqrt{2}+1)$
b) $8(\sqrt{3}+1)$
c) $3(\sqrt{2}+1)$
d) $3(\sqrt{3}+2)$

8) (CEFET/MG – 2008) Uma piscina foi projetada em forma de um retângulo cujo comprimento é o triplo da largura, conforme a FIG 1. Antes de ser construída, seu proprietário resolveu modificá-la, conforme a FIG 2, na qual AB, BC e CD são diâmetros dos semicírculos anexados. Se o preço da construção for proporcional ao seu perímetro, e o custo da primeira piscina com 16 metros de comprimento for de R$ 1.888,00; então o segundo projeto custará : (Use $\pi = 3{,}14$) :

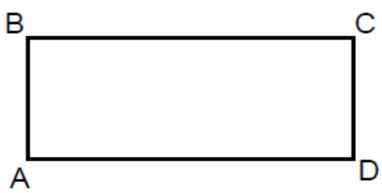


FIG. 1

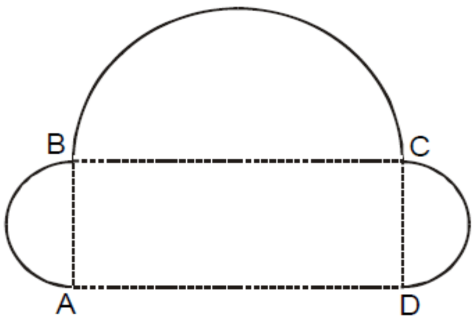
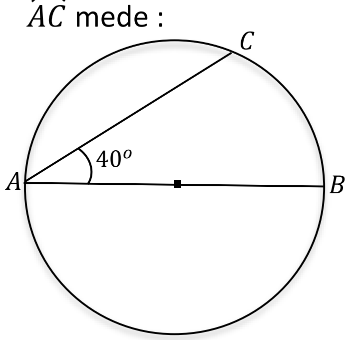


FIG. 2

a) R$ 2.465,20
b) R$ 2.590,40
c) R$ 2.535,80
d) R$ 2.560,60

9) (CEFET/MG – 2006) Uma circunferência, inscrita em um quadrado cuja diagonal mede 20 cm, possui comprimento, em cm, igual a :
   a) $\pi\sqrt{2}$
   b) $5\pi\sqrt{2}$
   c) $10\pi\sqrt{2}$
   d) $20\pi\sqrt{2}$

10) (PUC – SP) Na figura, AB é um diâmetro da circunferência. O menor dos arcos $\widehat{AC}$ mede :

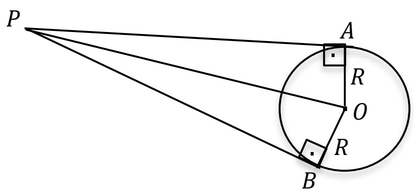


   a) 100^o
   b) 120^o
   c) 140^o
   d) 150^o
   e) 160^o

11) Prove que : numa circunferência, se um raio for perpendicular a uma corda, então ele divide essa corda ao meio.

9.7. Relações Métricas na Circunferência

Segmentos Tangentes : Dois segmentos tangentes a uma circunferência, que têm como extremo comum um ponto externo à mesma, têm a mesma medida.



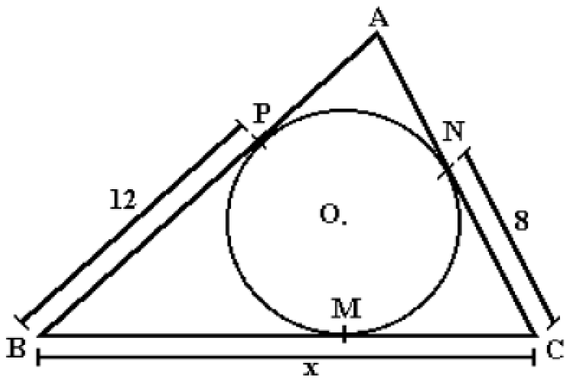
$PA\ e\ PB$ tangentes à circunferência
$\Rightarrow \overline{PA} = \overline{PB}$

Demonstração : Se $PA\ e\ PB$ são tangentes à circunferência dada, então os ângulos $P\hat{A}O\ e\ P\hat{B}O$ são retos (o raio é perpendicular à tangente no ponto de tangência). Temos também que $\overline{OA} = \overline{OB} = R$. Além disso, PO é a hipotenusa (comum) dos triângulos $PAO\ e\ PBO$. Pelo caso especial cateto-hipotenusa de congruência de triângulos retângulos (página 72), temos que $\Delta PAO \equiv \Delta PBO$. Da congruência, temos que $\overline{PA} = \overline{PB}$.

Exemplo 5 : Observando a figura a seguir, determine (as medidas estão em cm) :

   a) O valor de x.

b) A medida do segmento AN, sabendo que o perímetro do triângulo ABC é $46\ cm$.



Disponível em : https://www.prevest.com.br/dados/editor/file/LISTA_DE_EXERC_CIOS_1__ANO.pdf

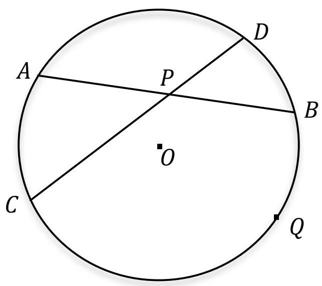
Resolução :

a) O triângulo está inscrito na circunferência. Seus três lados são tangentes a ela. Pelo resultado anterior, temos : $\overline{BM} = \overline{BP} = 12\ e\ \overline{CM} = \overline{CN} = 8$. Logo : $x = \overline{BM} + \overline{CM} = 20\ cm$.

b) Chamemos $\overline{AN}$ de y. Pelo resultado anterior, temos que $\overline{AP} = \overline{AN} = y$. Assim :

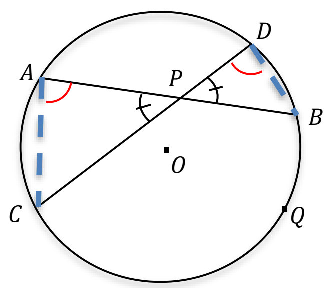
$$20 + 12 + y + 8 + y = 46 \Rightarrow 2y = 6 \Rightarrow y = 3\ cm$$

Relação Corda com Corda : Se duas cordas de uma circunferência se cruzam, elas se dividem em partes que têm o mesmo produto.

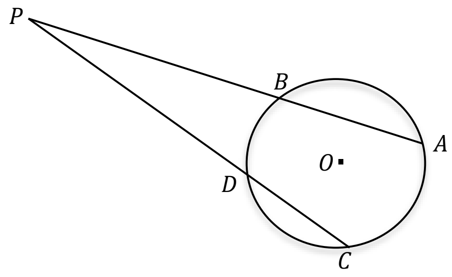


$$\overline{PA}.\overline{PB} = \overline{PC}.\overline{PD}$$

Demonstração : Observe que os ângulos $C\hat{A}P\ e\ B\hat{D}P$ são iguais (ângulos inscritos que "enxergam" o arco $\widehat{BQC}$). Além disso, são iguais também os ângulos $A\hat{P}C\ e\ B\hat{P}D$ (opostos pelo vértice). Pelo caso AA, concluímos que $\Delta APC \sim \Delta DPB$. Da semelhança : $\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB}$, donde sai o resultado.

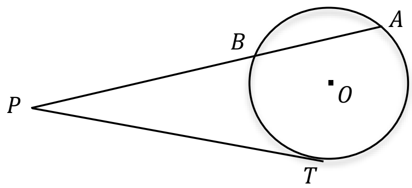


Relação Secante com Secante



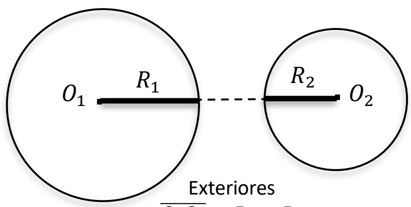
$$\overline{PA}.\overline{PB} = \overline{PC}.\overline{PD}$$

Relação Secante com Tangente

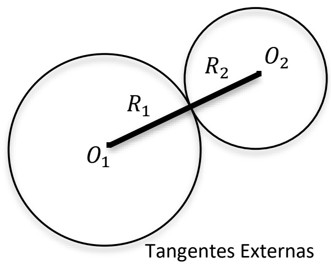


$$\overline{PA}.\overline{PB} = (\overline{PT})^2$$

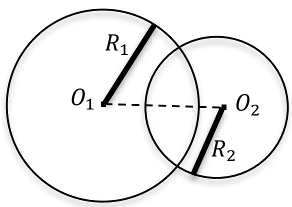
9.8. Posições Relativas de Duas Circunferências



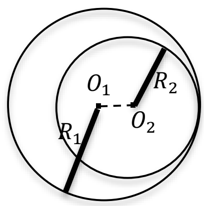
Exteriores
$\overline{O_1O_2} > R_1 + R_2$



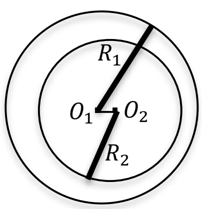
Tangentes Externas
$\overline{O_1O_2} = R_1 + R_2$



Secantes
$R_1 - R_2 < \overline{O_1O_2} < R_1 + R_2$



Tangentes Internas
$\overline{O_1O_2} = R_1 - R_2$

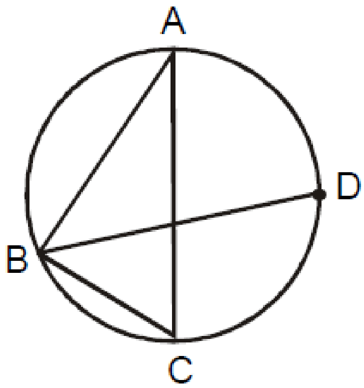


Interiores
$\overline{O_1O_2} < R_1 - R_2$

Se $O_1 = O_2$, dizemos que as circunferências são CONCÊNTRICAS.

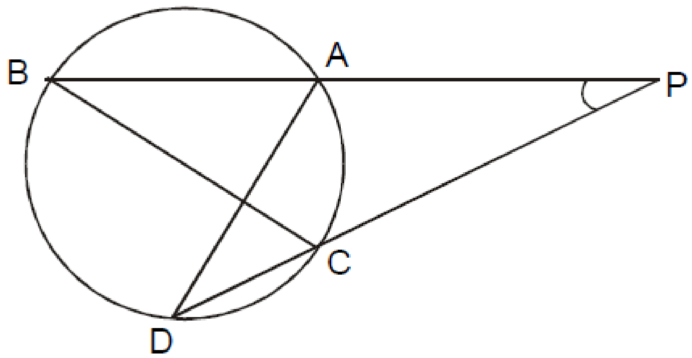
Exercícios Propostos

12) (CEFET/MG – 2007) Na figura, $AB = 4, BC = 2$, AC é diâmetro e os ângulos $A\hat{B}D$ e $C\hat{B}D$ são iguais. A medida da corda BD é :



a) $2\sqrt{3} + 1$
b) $\frac{9\sqrt{5}}{5}$
c) $3\sqrt{2}$
d) $2 + \sqrt{5}$

13) Na figura, os segmentos PB e PD são secantes à circunferência, as cordas AD e BC são perpendiculares e $AP = AD$. A medida x do ângulo $B\hat{P}D$ é :



a) 30^o
b) 40^o
c) 50^o
d) 60^o

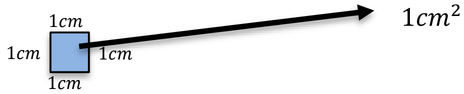
14) (UFMG) Num círculo, a corda $\overline{CD}$ é perpendicular ao diâmetro $\overline{AB}$ no ponto E. Se $\overline{AE}.\overline{EB} = 3$, a medida de $\overline{CD}$ é :

a) $\sqrt{3}$
b) $2\sqrt{3}$
c) $3\sqrt{3}$
d) 3
e) 6

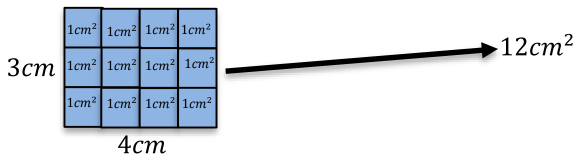
Capítulo 10 : Áreas de Figuras Planas

10.1. Introdução

"Medir" é um processo que sempre está relacionado a comparar com um "padrão". No caso da medida de áreas, nossos "padrões" serão quadrados. Por exemplo, a unidade padrão de $1cm^2$ corresponde à área de um quadrado de lado $1cm$:



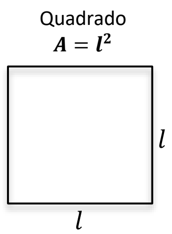
Quando tomamos, por exemplo, um retângulo com os lados medindo $3cm$ e $4cm$, veremos que o nosso "padrão" de $1cm^2$ cabe 12 vezes dentro dele :

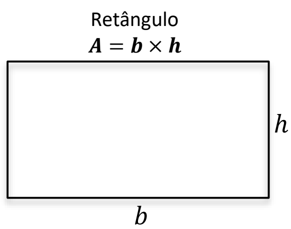


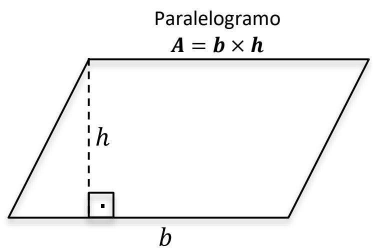
Então, dizemos que a medida da área deste retângulo é de 12 centímetros quadrados ($12cm^2$). Da mesma forma, a unidade de $1dm^2$ corresponde à área de um quadrado de lados medindo $1dm$, $1m^2$ é a área de um quadrado de lado $1m$, e assim por diante. Desse modo, vemos que as unidades de área são unidades de comprimento "ao quadrado". No capítulo 5, já aprendemos a mudar de uma unidade de área para outra.

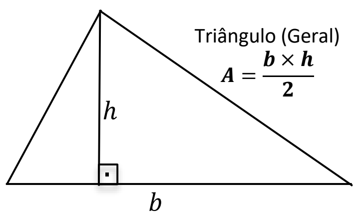
Felizmente, não precisamos proceder à medida de áreas como foi feito acima. Temos fórmulas para o cálculo de área das diversas figuras planas. Vamos a elas.

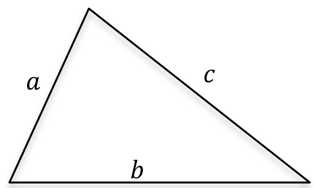
10.2. Fórmulas de Área







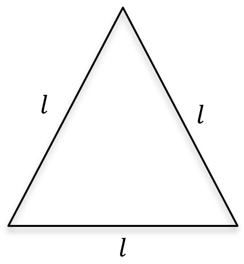




Triângulo (Fórmula de Heron) : Usada quando se conhecem as medidas dos três lados.

$$\boldsymbol{A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

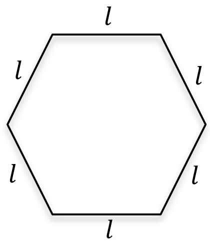
onde p é o semiperímetro do triângulo.



Triângulo Equilátero : Já vimos (página 63) que sua altura é dada por $h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$. Logo, sua área é :

$$A = \frac{b \times h}{2} = \frac{l \times \frac{l\sqrt{3}}{2}}{2} \Rightarrow \boldsymbol{A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}}$$

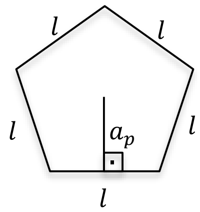
em que l é a medida do lado do triângulo.



Hexágono Regular : Já vimos que ele é composto por 6 triângulos equiláteros (página 88). Então, sua área é dada por :

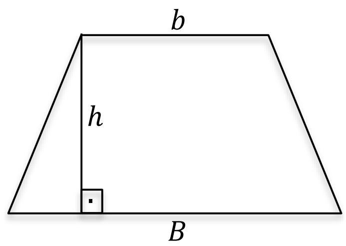
$$A = 6 \times \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \boldsymbol{A = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2}}$$

em que l é a medida do lado do hexágono.



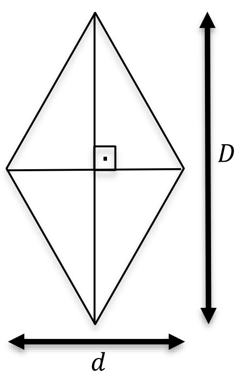
Polígono Regular : A área de qualquer polígono regular é dada pelo produto do semiperímetro (p) pelo apótema (a_p) do polígono.

$$\boldsymbol{A = p \times a_p}$$



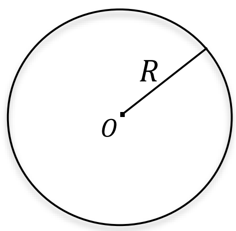
Trapézio

$$\boldsymbol{A = \frac{(B + b) \times h}{2}}$$



Losango

$$\boldsymbol{A = \frac{D \times d}{2}}$$



Círculo : Enquanto a circunferência é apenas a "curva", o círculo é entendido como a reunião da circunferência com os pontos em seu interior. Por isso, falamos em comprimento **da circunferência** e em área **do círculo**. A área de um círculo de raio R é :

$$\boldsymbol{A = \pi R^2}$$

onde π é um número irracional que vale, aproximadamente, 3,14.

Para calcular a área de um SETOR CIRCULAR, que é uma "fatia" do círculo, podemos, simplesmente, usar regra de três simples. As grandezas são diretamente proporcionais.

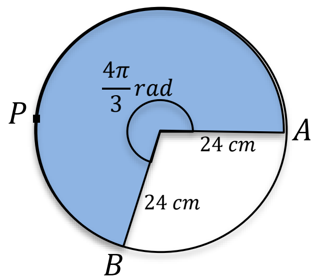
Exemplo 1 : Qual é a área de um setor circular de 150^o em um círculo de raio $72\ cm$?

Resolução : Caso tivéssemos um setor de 360^o (círculo inteiro), sua área seria de $A = (\pi.72^2)\ cm^2$. No caso de um setor de 150^o, a área será a :

$$\frac{360^o}{150^o} = \frac{\pi.72^2}{a} \Rightarrow a = \frac{\pi.72^2.150}{360} = \boldsymbol{2160\pi\ cm^2}$$

Se o ângulo estiver em radianos, procedemos da mesma maneira. Apenas devemos nos lembrar de que o círculo inteiro (360^o) corresponde a $2\pi\ radianos$.

Exemplo 2 : Considere um setor circular de ângulo central de $\frac{4\pi}{3}\ radianos$, em uma circunferência de raio $24\ cm$.



Calcule :

a) A área do setor.
b) O comprimento do arco $\widehat{APB}$.

Resolução :

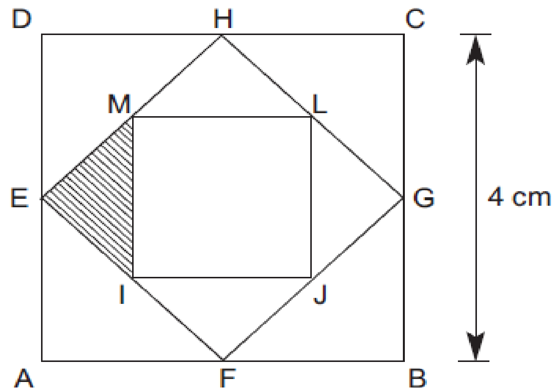
a) O círculo inteiro $(2\pi\ rad)$ corresponde a uma área de $A = (\pi.24^2)\ cm^2$. Logo, o setor de ângulo central $\frac{4\pi}{3} rad$ terá área a :

$$\frac{2\pi}{4\pi/_3} = \frac{\pi.24^2}{a} \Rightarrow \frac{6}{4} = \frac{\pi.24^2}{a} \Rightarrow a = \frac{\pi.24^2.4}{6} = \boldsymbol{384\pi\ cm^2}$$

b) A circunferência inteira $(2\pi\ rad)$ corresponde a um comprimento de $C = (2.\pi.24)\ cm$. Logo, o arco de ângulo central $\frac{4\pi}{3} rad$ terá comprimento c :

$$\frac{2\pi}{4\pi/_3} = \frac{2.\pi.24}{c} \Rightarrow \frac{6}{4} = \frac{2.\pi.24}{c} \Rightarrow c = \frac{2.\pi.24.4}{6} = \boldsymbol{32\pi\ cm}$$

Exemplo 3 : (CEFET/MG – 2011) Sabendo que os polígonos ABCD, EFGH e IJLM são quadrados, a área hachurada na figura a seguir, em cm^2, é igual a :



a) 1
b) 2
c) 3
d) 4

Resolução : No triângulo retângulo EDH (veja que ABCD é quadrado), calculamos o lado do quadrado EFGH (Teorema de Pitágoras) :

$$\overline{EH}^2 = \overline{ED}^2 + \overline{DH}^2 \Rightarrow \overline{EH}^2 = 2^2 + 2^2 \Rightarrow \overline{EH}^2 = 8 \Rightarrow \overline{EH} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}\ cm$$

Da mesma forma, no triângulo retângulo MHL, calculamos o lado do quadrado IJLM :

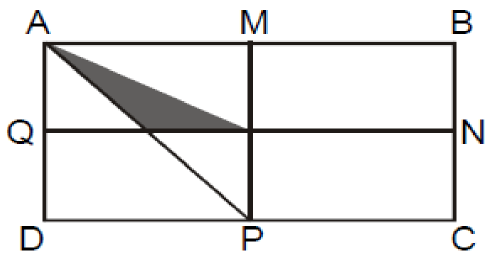
$$\overline{ML}^2 = \overline{MH}^2 + \overline{HL}^2 \Rightarrow \overline{ML}^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 \Rightarrow \overline{ML}^2 = 4 \Rightarrow \overline{ML} = 2\ cm$$

A área pedida é $\frac{1}{4}$ da diferença entre as áreas dos quadrados EFGH e IJLM :

$$A = \frac{1}{4}(\overline{EH}^2 - \overline{ML}^2) = \frac{1}{4}(8-4) = 1\ cm^2$$

Resposta : A.

Exemplo 4 : (CEFET/MG – 2007) ABCD é um retângulo e M, N, P e Q, pontos médios de seus lados, conforme representado na figura. Se a área sombreada é $\frac{1}{2}$, então a área desse retângulo é igual a :



a) 2
b) 4
c) 6
d) 8

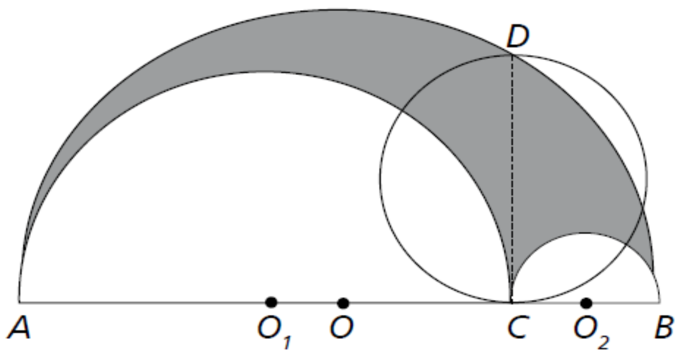
Resolução : Chamemos $\overline{AM} = a$ e $\overline{AQ} = b$. Vemos que a área do retângulo pedido é $A = (2a).(2b) = 4ab$.

O triângulo sombreado tem altura b e base $\frac{a}{2}$ (justifique). Logo, temos que :

$$\frac{\frac{a}{2} \times b}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{ab}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2ab = 4 \Rightarrow 4ab = 8$$

Resposta : D.

Exemplo 5 : (CEFET/MG – 2019) Arquimedes (212 a.C.), em uma de suas obras, descreve que um arbelos é uma região plana, delimitada por três semicírculos. Na figura a seguir, a região destacada é um arbelos, delimitado por três semicircunferências cujos diâmetros são $\overline{AB}, \overline{AC}$ e $\overline{BC}$. Se $med(\overline{AB}) = 6$, $med(\overline{AC}) = 4$ e $\overline{AB} \perp \overline{CD}$, a razão entre a área desse arbelos e a área do círculo de diâmetro $\overline{CD}$ é :



a) $\frac{1}{2}$
b) 1
c) $\frac{3}{2}$
d) 2

Resolução : Temos que $\overline{AB} = 6, \overline{AC} = 4\ e\ \overline{BC} = 6 - 4 = 2$. Logo, os raios dos círculos que compõem o arbelos são de $3,2\ e\ 1$. A área do arbelos (área sombreada) é : $A_1 = \pi.3^2 - \pi.2^2 - \pi.1^2 = 4\pi$.

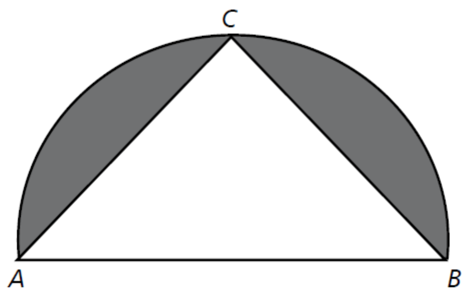
Para encontrar o diâmetro $\overline{CD}$, ligamos os pontos $A\ e\ D$, assim como $B\ e\ D$, formando o triângulo ADB, que é um triângulo retângulo, pois o ângulo $A\widehat{D}B$ está inscrito em uma semicircunferência (a maior) e, como já sabemos, todo ângulo inscrito em semicircunferência é reto. Logo, CD é altura relativa à hipotenusa do triângulo retângulo ADB e, portanto, $\overline{CD}^2 = \overline{AC}.\overline{BC} = 4 \times 2 = 8 \Rightarrow \overline{CD} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ (relação métrica no triângulo retângulo já estudada). A área do círculo de diâmetro CD é : $A_2 = \pi.(\sqrt{2})^2 = 2\pi$.

Então, a razão pedida é : $\frac{A_1}{A_2} = \frac{4\pi}{2\pi} = 2$.

Resposta : D.

Exercícios Propostos

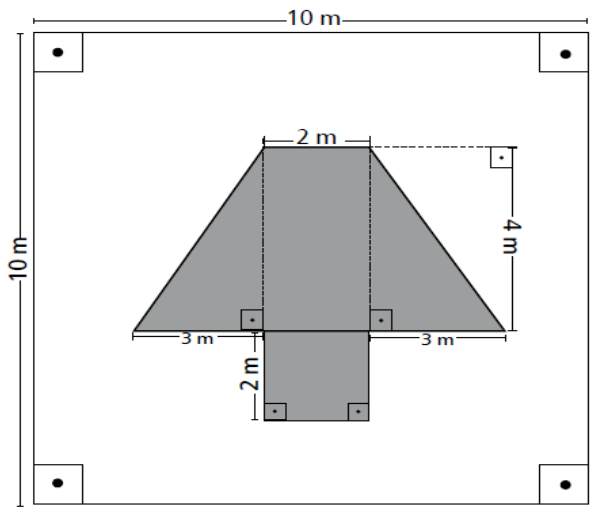
1) (CEFET/MG – 2020) Na figura a seguir, $\overline{AB}$ é o diâmetro da semicircunferência ACB. O triângulo isósceles ACB está inscrito nessa semicircunferência e $\overline{AC} = \overline{CB} = l$. A área da região sombreada, em função do valor de l, é igual a :



a) $\frac{l^2}{4}(\pi - 2)$
b) $\frac{l^2}{4}(\pi - 1)$
c) $\frac{l^2}{2}(\pi - 1)$
d) $\frac{l^2}{2}(2\pi - 1)$

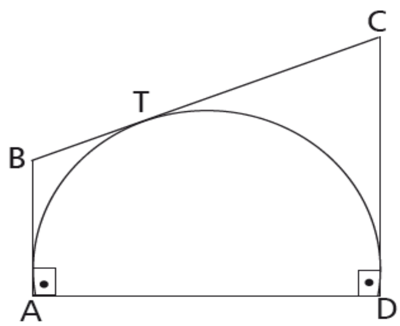
2) (CEFET/MG – 2020) Um piso quadrado, com 10 m de lado, será completamente revestido com dois tipos de granito, um claro que custa R$ 80,00 o metro quadrado, e um preto, que custa R$ 100,00 o metro quadrado. Esses pisos são vendidos apenas em caixas contendo cada uma delas 5 metros quadrados. O granito preto revestirá as áreas que formam um

trapézio isósceles e um quadrado, e o granito claro, o restante, conforme apresentado na figura a seguir. O valor pago na compra da quantidade mínima necessária desses dois tipos de granito para o revestimento desse piso será, em reais, de :



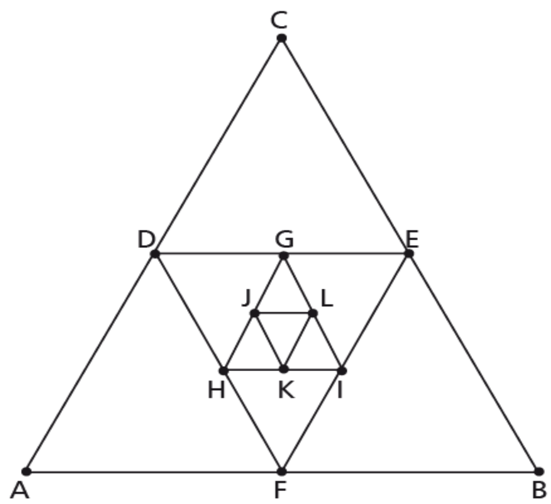
a) 6.100,00
b) 7.500,00
c) 8.900,00
d) 9.300,00

3) (CEFET/MG – 2017) Na figura a seguir, ATD é uma semicircunferência inscrita no trapézio ABCD e A, T e D são pontos de tangência. Se os lados paralelos desse trapézio medem 4 cm e 9 cm, então sua área, em centímetros quadrados, é igual a :



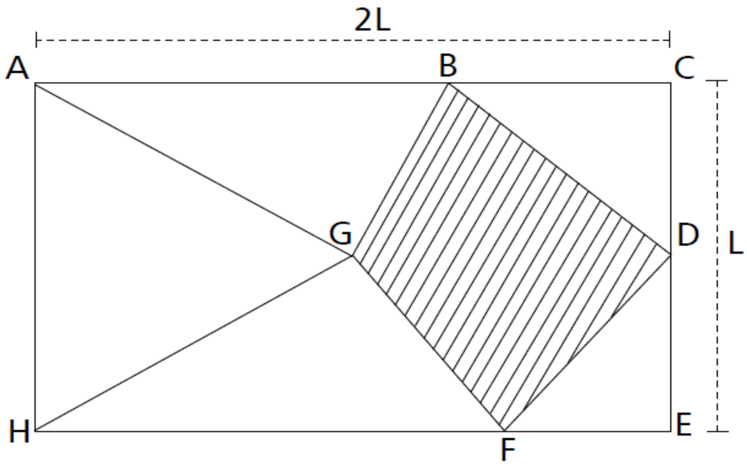
a) 22
b) 45
c) 78
d) 90

4) (CEFET/MG – 2017) Na figura a seguir, o triângulo ABC é equilátero de lado igual a 1 cm. Os pontos D, E e F são os respectivos pontos médios dos lados AC, BC e AB; os pontos G, H e I são os respectivos pontos médios dos lados DE, DF e EF e os pontos J, K e L são os respectivos pontos médios dos lados GH, HI e GI. A área do triângulo JKL, em centímetros quadrados, é :



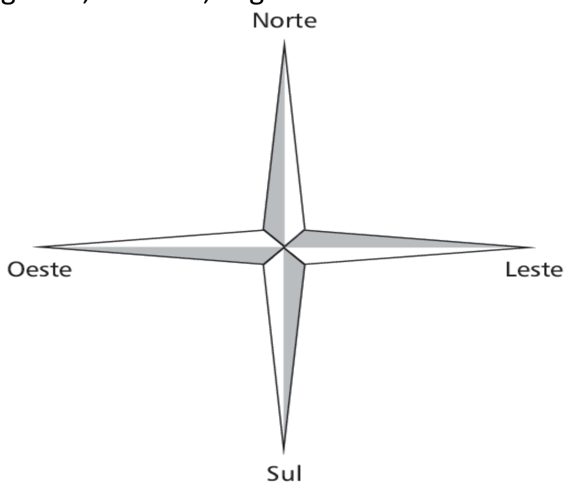
a) $\frac{\sqrt{3}}{256}$
b) $\frac{\sqrt{3}}{512}$
c) $\frac{\sqrt{3}}{768}$
d) $\frac{\sqrt{3}}{1024}$

5) (CEFET/MG – 2016) Na figura abaixo, o triângulo AGH é isósceles de base $\overline{AH}$ e tem área igual a $\frac{L^2}{2}$. O quadrilátero $ACEH$ é um retângulo. Se D é o ponto médio de $\overline{CE}$, então a área do quadrilátero $BDFG$, hachurado, é igual a :



a) $\frac{L^2}{2}$
b) $\frac{\sqrt{2}L^2}{4}$
c) $\frac{3L^2}{8}$
d) $\frac{3\sqrt{2}L^2}{16}$

6) (CEFET/MG – 2014) A figura 1 é uma representação plana da "Rosa dos Ventos", composta pela justaposição de quatro quadriláteros equivalentes, mostrados na figura 2. Com base nesses dados, a área da parte sombreada da figura 1, em cm^2, é igual a :



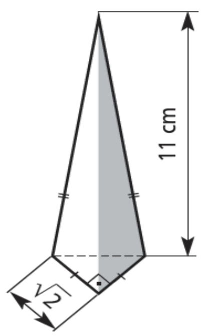
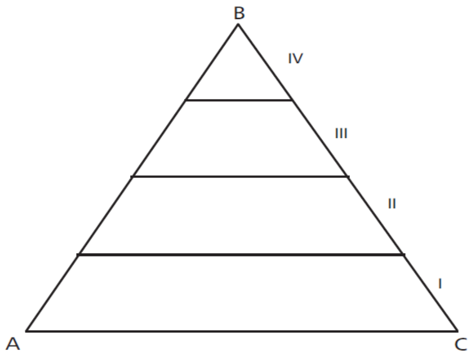


Figura 2

a) 12
b) 18
c) 22
d) 24

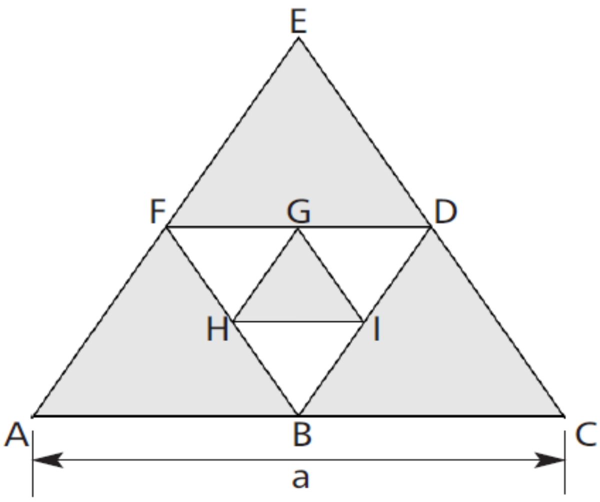
7) (CEFET/MG – 2013) Um triângulo equilátero ABC de lado 1 cm está dividido em quatro partes de bases paralelas e com a mesma altura, como representado na figura abaixo. A parte I tem a forma de um trapézio isósceles cuja área, em cm^2, é :



a) $\frac{\sqrt{3}}{16}$
b) $\frac{5\sqrt{3}}{32}$
c) $\frac{7\sqrt{3}}{64}$
d) $\frac{9\sqrt{3}}{128}$

8) (CEFET/MG – 2012) Se a área de um retângulo, cujos lados são denominados $a\ e\ b$, em que $a > b$, é igual a $120m^2$ e seu perímetro é igual a $52m$, então é correto afirmar que :
a) $a - b = 0$
b) $a - b = 2$
c) $a - b = 14$
d) $a - b = 68$

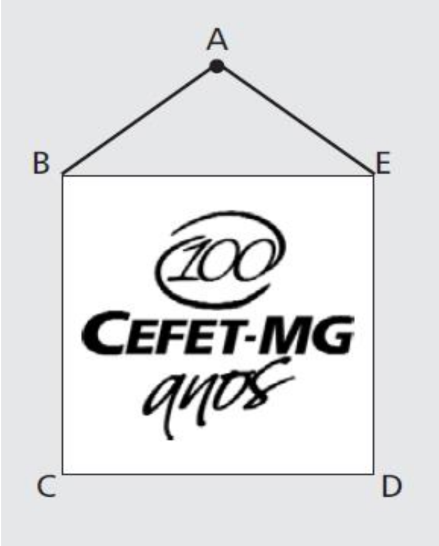
9) (CEFET/MG – 2012) Na figura abaixo, todos os triângulos são equiláteros. A soma das áreas sombreadas é :



a) $\frac{7\sqrt{3}}{16}a^2$
b) $\frac{13\sqrt{3}}{16}a^2$
c) $\frac{7\sqrt{3}}{32}a^2$
d) $\frac{13\sqrt{3}}{64}a^2$

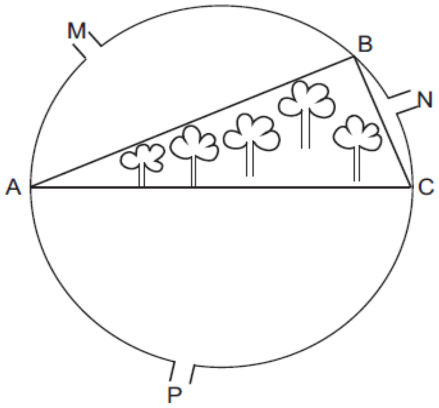
10) (CEFET/MG – 2012) Um painel quadrado BCDE, comemorativo dos 100 anos do CEFET – MG, encontra-se pendurado na parede de um dos corredores da escola, em um prego posicionado no ponto A, conforme figura a seguir. O

triângulo ABE é isósceles e a medida do segmento AB corresponde a 2/3 da medida do lado do quadrado BCDE. Se o perímetro do polígono ABCDE é 13 metros, então sua área, em m^2, é :



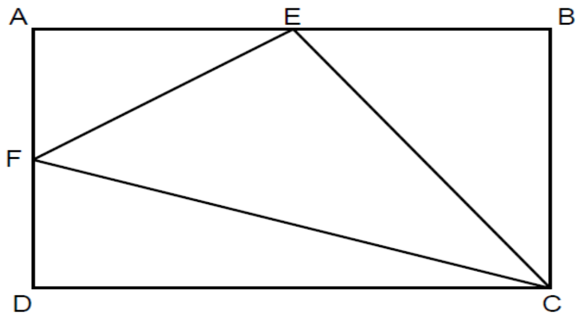
a) $3(3+\sqrt{7})$
b) $3(12+\sqrt{7})$
c) $3\left(3+\frac{\sqrt{7}}{4}\right)$
d) $3\left(4+\frac{\sqrt{7}}{4}\right)$

11) (CEFET/MG – 2011) um parque ecológico com formato circular, cujo diâmetro AC mede 500 metros, tem três entradas M, N e P que dão acesso ao espaço triangular ABC, reservado ao plantio de árvores, conforme figura abaixo. Se o lado BC do triângulo mede 300 metros, então a área do parque, externa ao espaço plantado, em m^2, é igual a : (Considere $\pi = 3$)



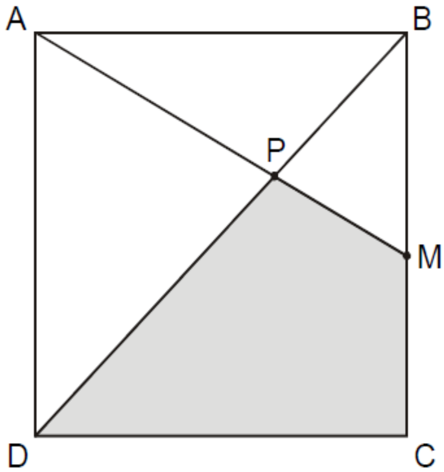
a) 93.700
b) 127.500
c) 147.500
d) 153.750

12) (CEFET/MG – 2010) No retângulo ABCD os lados AB e BC medem, respectivamente, 16 cm e 10 cm e E e F são os pontos médios dos segmentos. A área do triângulo CEF, em cm^2, é :



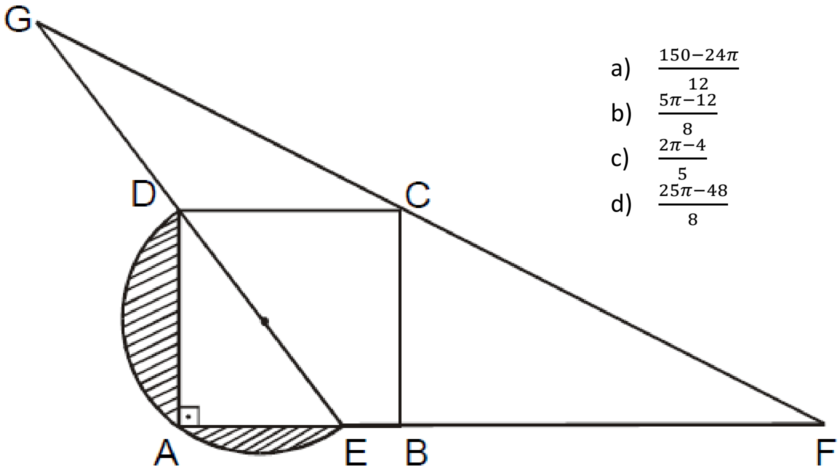
a) 20
b) 40
c) 60
d) 80

13) (CEFET/MG – 2010) No retângulo ABCD, AB=30, BC=40, M é o ponto médio do lado BC e $\frac{DP}{DB} = \frac{2}{3}$. Nesse caso, a área do quadrilátero CDPM, em cm^2, é igual a :



a) 400
b) 450
c) 500
d) 550

14) (CEFET/MG – 2008) Na figura abaixo, ABCD é um quadrado e BF o prolongamento de AB. Se EF=8, EB=1, DE diâmetro do semicírculo e D ponto médio de EG, então a área hachurada é igual a :



a) $\frac{150-24\pi}{12}$
b) $\frac{5\pi-12}{8}$
c) $\frac{2\pi-4}{5}$
d) $\frac{25\pi-48}{8}$

15) (CEFET/MG – 2012) A área de um paralelogramo ABCD é $54\, dm^2$. Aumentando-se 6 unidades na sua altura e diminuindo-se 4 unidades na base, sua área aumenta $6\, dm^2$. Dessa forma, a razão entre as medidas da base e da altura desse paralelogramo será :

a) 3/2
b) 2/3
c) 1/2
d) 1/3

Capítulo 11 : Noções de Geometria Espacial, Médias

11.1. Posições Relativas de Duas Retas no Espaço

Dadas duas retas situadas no espaço tridimensional, temos que elas podem ser :

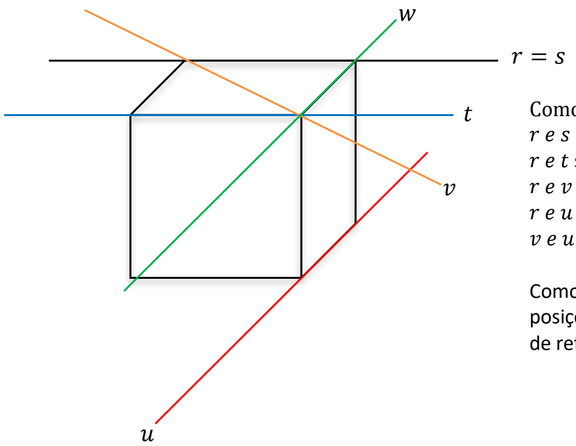
A) **Coincidentes** : Possuem todos os pontos em comum.

B) **Paralelas** : Estão situadas em um mesmo plano, mas não possuem nenhum ponto em comum.

C) **Concorrentes** : Possuem um único ponto em comum. Retas concorrentes são sempre coplanares, ou seja, existe um plano que contém ambas.

D) **Reversas** : Não existe um plano que contenha ambas (não – coplanares).

No cubo a seguir, temos exemplos de todos os tipos de retas :



Como exemplos, podemos citar :
r e s são coincidentes
r e t são paralelas
r e v são concorrentes
r e u são reversas
v e u são reversas

Como exercício, determine as posições relativas de outros pares de retas que aparecem na figura.

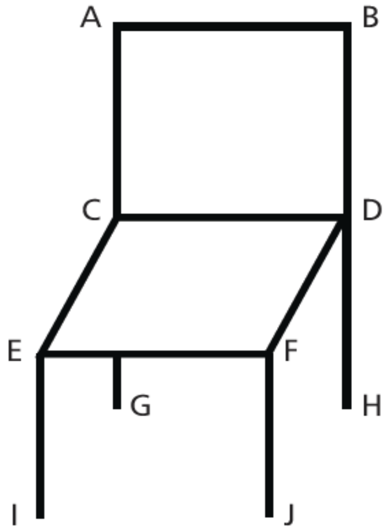
OBS : Duas retas são ditas PERPENDICULARES quando são concorrentes e formam entre si ângulos de 90^o. Na figura acima, temos que r e w são retas perpendiculares. Assim como t e w.

Já duas retas são ORTOGONAIS quando existe uma reta paralela a uma delas (não pode ser coincidente) e perpendicular à outra. Por exemplo, temos que t e u são ortogonais (veja que w é paralela a u e perpendicular a t). Assim como r e u.

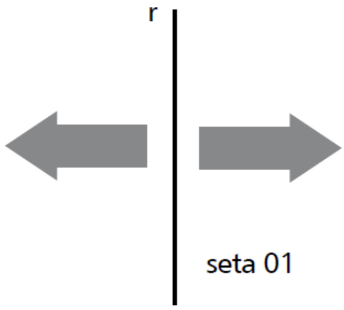
Exercícios Propostos

1) (CEFET/MG – 2014) A figura a seguir representa uma cadeira onde o assento é um paralelogramo perpendicular ao encosto. A partir dos pontos dados, é correto afirmar que os segmentos de retas :

a) CD e EF são paralelos.
b) BD e FJ são concorrentes.
c) AC e CD são coincidentes.
d) AB e EI são perpendiculares.



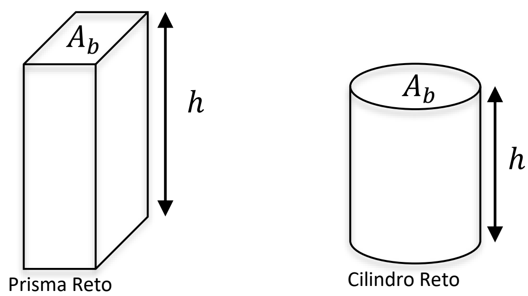
2) Simetrias (CEFET/MG – 2020) Observe a figura abaixo. Nessa figura, a simetria mostrada da seta 01 em relação à reta r é uma :



a) Rotação
b) Reflexão
c) Translação
d) Translação deslizante

11.2. Prismas e Cilindros

O volume de um prisma ou de um cilindro é calculado multiplicando-se a ÁREA DA BASE pela ALTURA do mesmo.



$$V = A_b \times h$$

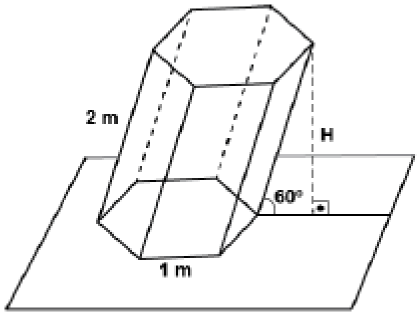
Exemplo 1 : Qual é o volume de um cilindro circular reto com raio da base igual a $5cm$ e altura de $12cm$? (Use $\pi = 3{,}14$)

Resolução : $A_b = \pi R^2 = 3{,}14 \times 5^2 = 3{,}14 \times 25 = 78{,}5cm^2$

$$V = A_b \times h = 78{,}5 \times 12 = 942cm^3 \; ou \; 942mL$$

Para prismas e cilindros oblíquos, a fórmula é a mesma. Porém, nesses casos, a altura não coincidirá com a “medida” lateral.

Exemplo 2 : Calcule o volume do prisma abaixo :



Disponível em : http://hugeexerciselist.com/index.php?ui=prisma

Resolução : A área da base é a área de um hexágono regular de lado $l = 1m$:

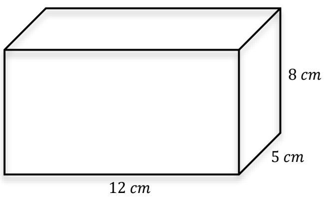
$$A_b = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}m^2$$

A altura é dada por : $sen\ 60^o = \frac{H}{2} \Rightarrow H = 2.sen\ 60^o = \sqrt{3}m$

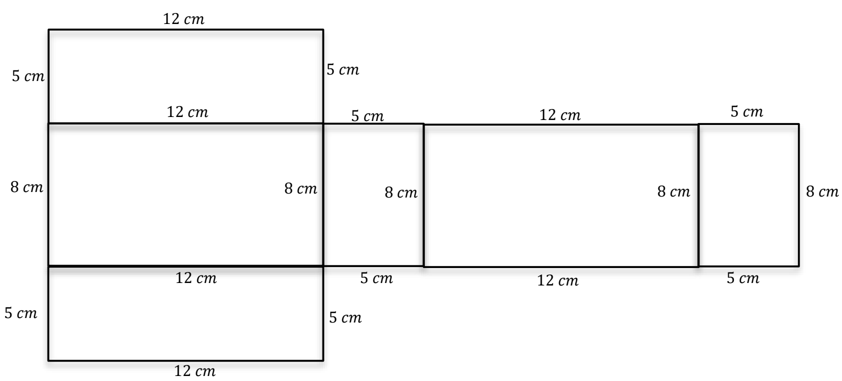
Logo : $V = \frac{3\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3} = \frac{9}{2} = 4{,}5m^3 = 4.500dm^3 = 4.500L$

Também podemos calcular a área de todas as “paredes” ou faces de um sólido geométrico. Esta é a sua ÁREA TOTAL. Para facilitar a visualização e o cálculo, podemos “abrir” o sólido, colocando todas as suas faces em um plano. Este procedimento chama-se PLANIFICAR o sólido.

Exemplo 3 : Calcular a área total do prisma :



Resolução : Vamos PLANIFICAR o sólido :



Vemos que o prisma é formado por 6 retângulos, que aparecem aos pares. Sua área total será :

$$A_T = 2 \times 12 \times 5 + 2 \times 12 \times 8 + 2 \times 5 \times 8$$
$$A_T = 120 + 192 + 80$$
$$A_T = 392cm^2$$

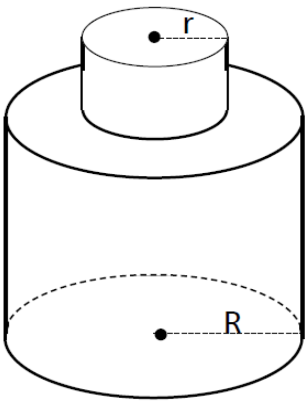
Isso quer dizer que, se quisermos confeccionar uma caixa de acrílico (por exemplo) com o formato e as medidas da figura, gastaríamos $392cm^2$ de acrílico.

Veja que o procedimento da planificação nos permite calcular a área total de vários sólidos, não só prismas e cilindros.

Exercícios Propostos

---

3) (CEFET/MG – 2020) Uma empresa construiu um reservatório de água com dois cilindros justapostos, como na figura a seguir. Sabe-se que o raio do cilindro maior é 8 vezes o raio do cilindro menor e V_1 e V_2 são os volumes do cilindro menor e maior, respectivamente. Considere que $V_1 = 3\pi r^2$ e $V_2 = 12\pi R^2$. Se o reservatório possui capacidade de $3084\pi\ m^3$, então o raio do cilindro maior é, em metros, igual a :



a) 14
b) 16
c) 18
d) 20

4) (CEFET/MG – 2019) A figura 1 mostra uma pirâmide formada por um quadrado e quatro triângulos equiláteros. A planificação dessa pirâmide está representada na figura 2. Se a área total da pirâmide é dada pela área da figura 2 e o lado do quadrado mede l, então a área total da pirâmide é :

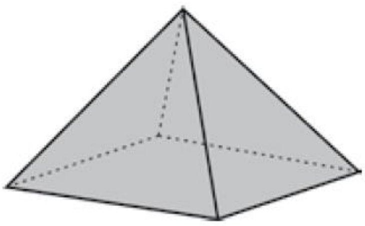


Figura 1

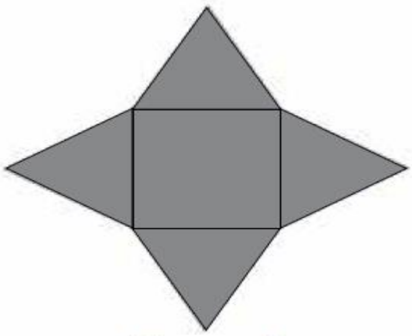


Figura 2

a) $\frac{3l^2}{2}$
b) $l^2\left(1+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$
c) $l^2(1+\sqrt{3})$
d) $3l^2$

5) (CEFET/MG – 2020) Carlos solicitou a um carpinteiro a construção de uma caixa no formato de um paralelepípedo retangular, com dimensões $x, 2x\ e\ 3x\ cm$. Após analisar todos os materiais que precisavam ser guardados nessa caixa, o carpinteiro explicou a Carlos que o espaço seria insuficiente e que, portanto, ela deveria ser maior que aquela inicialmente solicitada. Assim, a caixa construída passou a ter as seguintes dimensões : $(x+1), (2x+2)\ e\ (3x+2)\ cm$. A diferença entre o volume da caixa construída pelo carpinteiro e o volume da caixa inicialmente solicitada por Carlos, em cm^3, é :
a) $2(8x^2+7x+2)$
b) $3(2x^2+5x+1)$
c) $4(x^2+3x+4)$
d) $6(2x^2+6x+2)$

11.3. Médias

Conceito : Dados n números reais, $x_1, x_2, \dots, x_n$, definimos :

A **média aritmética** deles é : $M_A = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$.

A **média geométrica** deles é : $M_G = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \dots \times x_n}$.

Resultado Importante : A média aritmética de um conjunto de números é sempre maior ou igual à média geométrica do mesmo conjunto ($M_A \geq M_G$). Além disso, temos que $M_A = M_G$ se, e somente se, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Exemplo 4 : Determine a média aritmética e a média geométrica dos números 5, 12, 8 e 25.

Resolução : $M_A = \frac{5+12+8+25}{4} = \frac{50}{4} = 12{,}5$

$$M_G = \sqrt[4]{5 \times 12 \times 8 \times 25} = \sqrt[4]{12000} = 10{,}5$$

Observamos que, realmente, a média aritmética é maior que geométrica (e só seriam iguais se todos os quatro números fossem iguais).

Exemplo 5 : A média aritmética das alturas de um grupo de 16 pessoas é 1,78 metros. Se duas pessoas deste grupo, de 1,64 m e 1,82 m, foram substituídas por outras duas de 1,52 m e 1,58 m, qual passou a ser a nova média aritmética das alturas?

Resolução : Temos, inicialmente, que : $\frac{S}{16} = 1{,}78 \Rightarrow S = 16 \times 1{,}78 = 28{,}48\,m$. Esta é a soma das alturas das 16 pessoas do grupo inicial. Após a substituição das duas pessoas, a soma de alturas passou a :

$$S' = 28{,}48 - 1{,}64 - 1{,}82 + 1{,}52 + 1{,}58 = 28{,}12\ m$$

Como o grupo continuou com 16 pessoas, a média aritmética das alturas passou a : $M_A = \frac{S\prime}{16} = \frac{28{,}12}{16} = 1{,}76\ m.$

Exercícios Propostos

6) (CEFET/MG – 2020) Joana está ansiosa para saber seu conceito final em Matemática, que está condicionado à média aritmética das notas obtidas nas quatro provas da disciplina. O quadro abaixo apresenta a correspondência entre os conceitos e os intervalos de notas.

Conceito	Intervalo da nota
Insatisfatório	$0 \leq N \leq 3$
Regular	$3 < N \leq 6$
Bom	$6 < N \leq 8$
Ótimo	$8 < N \leq 10$

O sistema online da escola divulgou as quatro notas de Joana, como especificado no quadro a seguir.

N_1	N_2	N_3	N_4
4	7	9	8

De acordo com essas notas, o conceito de Joana na disciplina de Matemática foi :

a) Insatisfatório
b) Regular
c) Bom
d) Ótimo

Respostas

Capítulo 1
1) 512, 1024, 384
2) 900, 600
3) B
4) C
5) B
6) D

Capítulo 2
1) 15 dias
2) B
3) B
4) B
5) C
6) D
7) B
8) A

Capítulo 3
1) A
2) B
3) B
4) B
5) A
6) C
7) C
8) B
9) A
10) D
11) D
12) D
13) D
14) C
15) C
16) B
17) C
18) A

Capítulo 4
1) D
2) A
3) C

Capítulo 5
1) a) 0,000534 km
   b) 126320 dg
   c) 0,00000000534 km^2
   d) 15000 L
   e) 0,000004536 dam^3
   f) 737280 s
   g) 1º3’18”
   h) 1,6416 km/h
2) A
3) B
4) B

Capítulo 6
1) D
2) A
3) D
4) B
5) D
6) D
7) A
8) C
9) D
10) A
11) D
12) C
13) B
14) A
15) A
16) D
17) D
18) C
19) B
20) D
21) B

Capítulo 7
1) C
2) A
3) D
4) B

Capítulo 8
1) C
2) D

Capítulo 9

1) D
2) B
3) B
4) A
5) C
6) B
7) A
8) D
9) C
10) A
11) Para demonstrar
12) C
13) A
14) B

Capítulo 10

1) A
2) C
3) C
4) A
5) A
6) D
7) C
8) C
9) D
10) C
11) B
12) C
13) C
14) D
15) A

Capítulo 11

1) A
2) B
3) B
4) C
5) A
6) C

Referências Bibliográficas

BOSQUILHA, Alessandra; AMARAL, João Tomás do. ***Minimanual Compacto de Matemática – Ensino Fundamental.*** Editora Rideel.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antônio. ***Matemática e Realidade.*** Sexto ao Nono Ano. Atual Editora.

SILVEIRA, Ênio; MARQUES, Cláudio. ***Matemática : Compreensão e Prática.*** Sexto ao Nono Ano. Editora Moderna.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando***. Teláris – Matemática.*** Sexto ao Nono Ano. Editora Ática.

POMPEO, José Nicolau; DOLCE, Osvaldo. ***Fundamentos de Matemática Elementar.*** Volume 9 : Geometria Plana. Atual Editora.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cézar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. ***A Matemática do Ensino Médio – Volume 2.*** Editora SBM.

BARBOSA, João Lucas Marques. ***Geometria Euclidiana Plana.*** Editora SBM.

RIMSA, Leonardo Gonçalves. ***Matemática Financeira Concisa***. IUS Editora.

Questões de vestibulares anteriores do CEFET/MG : www.copeve.cefetmg.br.
Questões extraídas da internet : endereço indicado em cada uma delas.